Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 29.11.2018
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 8

Abgabe: Freitag 7. Dezember, 2018, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Koerzivität von nicht-konformen Bilinearformen) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|v_h\|_h := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|^2_{L^2(T)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

eine Norm auf dem Crouzeix-Raviart Finite-Elemente-Raum definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

koerziv, auf dem Crouzeix-Raviart Finite-Elemente Raum, bzgl. der diskreten Norm $\|\cdot\|_h$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Bilinearform der NIPG-Formulierung

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) = &\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, \mathrm{d}x \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e -\{\nabla u_h \cdot \vec{n}\}[\![v_h]\!] + \{\nabla v_h \cdot \vec{n}\}[\![u_h]\!] + \frac{\eta}{h_e}[\![u_h]\!][\![v_h]\!] \, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3}$$

koerziv auf dem "Broken-Sobolevspace"

$$H^1(\mathcal{T}_h) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,|\, u_{|T} \in H^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \right\} \tag{4}$$

ist.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Norm (Zeigen Sie, dass es sich wirklich um eine Norm handelt).

Aufgabe 2 (Ortsabhängige Parameter) (8 Punkte)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $D \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{d\times d})$. Weiter sei D uniform elliptisch. D.h. Für alle $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\xi^T D(x)\xi \geq c\|\xi\|^2 \tag{5}$$

mit einer von x unabhängigen Konstanten $c > 0$.
Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D\nabla u &= f \qquad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

(a) Leiten Sie die schwache Formulierung her.

(b) Zeigen Sie, dass die Bilinearform a in der schwachen Formulierung koerziv und stetig ist.

(c) Sei $\mathcal{T}_h$ ein reguläres Dreiecksgitter. Wir wollen die Lösung in $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_h)$ approximieren, dazu verwenden wir die diskrete Bilinearform

$$a_h(u_h, v_v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} |T|D(x_T)\nabla u(x_T) \cdot \nabla v(x_T)\,\mathrm{d}x.$$

Dabei bezeichnet x_T den Mittelpunkt des Dreiecks T. D.h. wir approximieren das Integral auf einem Dreieck durch die Mittelpunktsregel (exakt auf P^1). Geben Sie mithilfe des ersten Lemmas von Strang eine Fehlerabschätzung für $\|u - u_h\|_{H^1}$ an.

Aufgabe 3 (Programmier- und Nikolausaufgabe) (8 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter `https://metatron.uni-muenster.de:8000`.