Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier 22.11.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 7

Abgabe: Freitag 30. November, 10 Uhr

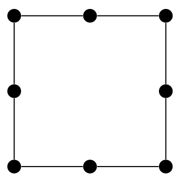
Aufgabe 1 (Zweites Lemma von Strang) (4 Punkte)

Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie für das erste Lemma von Strang. Zeigen Sie:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq c \left(\inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_{H^1} + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|a_h(u, w_h) - \langle l_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|_{H^1}} \right) \tag{1}$$

Aufgabe 2 (Serendipity-Element) (4 Punkte)

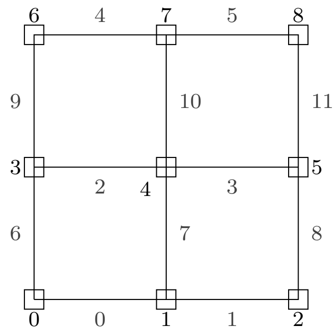
Es sei $E = [0,1]^2$ das Einheitsquadrat, mit folgenden Knoten $\{\hat{x}_i\}_{i=0}^7$:



Sowie $\mathcal{P} = \left\{ p \in \mathbb{P}^3 \,|\, p_{|\partial K} \in \mathbb{P}^2 \right\}$ und $\Psi = \{\psi_i\}_{i=0}^7$ die Knotenfunktionale zu $\{\hat{x}_i\}_{i=0}^7$.

(a) Berechnen Sie die Basis Φ von $\mathcal{P}$, sodass $(E, (\mathcal{P}, \Phi), \Psi)$ der Definition des Finiten Elements entspricht. Dieses Finite Element heißt Serendipity-Element.

(b) Betrachten Sie folgendes Gitter:



Berechnen Sie das Besetzungsmuster der Steifigkeitsmatrix bei Verwendung des Serendipity-Elements. Berücksichtigen Sie dabei die gegebene Nummerierung der Knoten (schwarz) und Kanten (grau).

Aufgabe 3 (Vergleich von Interpolationsoperatoren) (4 Punkte)

Es sei $\Omega = (0,1)$ gleichmäßig unterteilt in Intervalle der Länge $h = \frac{1}{4}$. Berechnen Sie die L^2-Projektion $I_{L^2}v$ und Clément-Interpolation $I_{Cle}v$ der Funktion v gegeben durch

$$v(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0, \frac{1}{4}) \\ 1 & x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 0 & x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -\frac{1}{2} & x \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases} \tag{2}$$