Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

15.11.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 6

Abgabe: Freitag, 23.11.2018, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Eindeutigkeit des Neumann-Problems) (6 Punkte)

Betrachten Sie das Poisson-Problem mit homogenen Neumann-Randwerten:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_n u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Sie haben auf Blatt 2 gesehen, dass die schwache Formulierung für $u \in H^1(\Omega)$ äquivalent ist zum Minimierungsproblem

$$J(u) \to \min \qquad \text{mit} \qquad J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Um Eindeutigkeit der Lösung zu erzwingen, fügen wir die Nebenbedingung

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0 \tag{2}$$

hinzu. Wir erhalten also ein Minimierungsproblem mit Nebenbedingung. Eine Methode mit solchen Problemen umzugehen sind Lagrange-Multiplikatoren. Wir wollen zunächst ein einfacheres Beispiel betrachten:

(a) Betrachten Sie für $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch das folgende Minimierungsproblem mit Nebenbedingung

$$\begin{aligned} F(x) = \langle x, Ax \rangle &\to \min \\ \|x\|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\Lambda(x, \lambda) := \langle x, Ax \rangle + \lambda(\|x\|^2 - 1)$$

das Lagrange-Funktional. Zeigen Sie: Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass für die Lösung $x \in \mathbb{R}^N$ des Problems gilt:

$$\nabla \Lambda(x, \lambda) = 0.$$

Wenden wir uns nun wieder dem Problem (1)+(2) zu:

(b) Stellen Sie ein Lagrange-Funktional für das Problem (1)+(2) auf.

(c) Wie sieht das resultierende Gleichungssystem aus?

(d) Wie interpretieren Sie den Lagrange-Multiplikator λ?

Aufgabe 2 (Bestapproximation) (2 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in L^2(\Omega)$ und $U := \{f \in L^2(\Omega) \mid f = \text{const}\}$. Zeigen Sie, dass

$$\overline{u} := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\ dx$$

die Bestapproximation bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$ an u darstellt, also

$$\inf_{v \in U} \|u - v\|_{L^2} = \|u - \overline{u}\|_{L^2}$$

gilt.

Aufgabe 3 (Inverse L^∞-Abschätzung) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω mit

$$\sup_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \leq h, \qquad \inf_{T \in \mathcal{T}_h} |T| \geq \kappa h^2,$$

für ein $\kappa > 0$. Ferner sei $S_h^k := \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}^k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}$. Zeigen Sie für $v \in S_h^k(\mathcal{T}_h)$ die inverse L^∞-Abschätzung

$$\|v\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \frac{c}{h} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wobei $c > 0$ eine von h unabhängige Konstante sei.
Hinweis: Benutzen Sie die Normäquivalenz auf dem endlichdimensionalen Raum der linearen Funktionen auf dem Referenzelement.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter `https://metatron.uni-muenster.de:8000`.