Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 08.11.2018
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 5

Abgabe: Freitag, 16.11.2018, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Lokale Steifigkeitsmatrix) (4 Punkte)

(a) Es seien $\hat{x}_0 = (0,0), \hat{x}_1 = (1,0), \hat{x}_2 = (0,1)$ und $\hat{S}_2 \subset \mathbb{R}^2$ das Einheitsdreieck. Ferner seien $\hat{\varphi}_i$ für $0 \leq i \leq 2$ die linearen Funktionen mit $\hat{\varphi}_i(\hat{x}_j) = \delta_{ij}$ für $0 \leq i,j \leq 2$. Berechnen Sie

$$\left(\int_{\hat{T}} \hat{\nabla}\hat{\varphi}_i \cdot \hat{\nabla}\hat{\varphi}_j \,\mathrm{d}x\right)_{i,j=0,1,2} \qquad \left(\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}_i\hat{\varphi}_j \,\mathrm{d}x\right)_{i,j=0,1,2} \tag{1}$$

in Koordinaten des Referenzelements.

(b) Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{T}$ eine zulässige Triangulierung von Ω. T sei ein Dreieck dieser Triangulierung mit Eckpunkten a_0, a_1, a_2 und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ seien die linearen Funktionen mit $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$ für $0 \leq i,j \leq 2$. Betrachten Sie die Integrale

$$\left(\int_{T} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \,\mathrm{d}x\right)_{i,j=0,1,2} \qquad \left(\int_{T} \varphi_i\varphi_j \,\mathrm{d}x\right)_{i,j=0,1,2} \tag{2}$$

Die affin-lineare Transformation vom Einheitsdreieck $\hat{T}$ auf T sei mit $F : \hat{T} \to T, F = Ax + b$ bezeichnet. Formulieren Sie die Integrale in Bezug auf die Vektoren $\hat{\nabla}\hat{\varphi}_i, i = 0,1,2$, die Matrix A und ggf. den Integralen aus Aufgabenteil (a). Rechnen Sie hierbei die Matrixeinträge *nicht* einzeln aus.

Aufgabe 2 (Koerzivität der diskreten Bilinearform) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $A \in C(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d\times d})$ uniform elliptisch, d.h. es existiert eine Konstante $c_A > 0$, sodass

$$\xi^T A(x)\xi \geq c_a|\xi|^2 \qquad \forall c \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Sei außerdem $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von Ω und es existiere ein $\sigma > 0$, sodass $\sigma(S) := \frac{h(S)}{\rho(S)} \leq \sigma$ für alle $S \in \mathcal{T}_h$. Sei $\hat{S} \in \mathbb{R}^d$ das Einheitssimplex und $T_S : \hat{S} \to S$ die Referenzabbildung für $S \in \mathcal{T}_h$. Für $k \geq 1$ definieren wir die diskrete Bilinearform $b_h : S_h^k \times S_h^k \to \mathbb{R}$ durch

$$b_h(u_h, v_h) := \sum_{S\in\mathcal{T}_h} |\det(\nabla T_S)| \int_\Omega (A\nabla u_h \cdot \nabla v_h) \circ T_S \tag{4}$$

zur Approximation der Bilinearform

$$b(u, v) := \int_\Omega A \nabla u \cdot \nabla v. \tag{5}$$

(a) Zeigen Sie: Es eine Konstante $c > 0$, sodass

$$\frac{c_A}{c} |v_h|_{H^1(\Omega)} \leq b_h(v_h, v_h) \qquad \forall v_h \in S_h^k. \tag{6}$$

(b) Von welcher Ordnung muss die Quadraturregel zur Berechnung des Integrals in (4) gewählt werden, um das Integral exakt zu berechnen?

Aufgabe 3 (Poincaré-Ungleichung mit Mittelwert 0) (4 Punkte)

Es sei $\Omega = (0, 1)$ und $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{7}$$

Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante C, sodass

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u'\|_{L^2(\Omega)}. \tag{8}$$