Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier 01.11.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 4

Abgabe: Freitag, 09.11.2018, 10 Uhr

Aufgabe 1 (Referenzabbildung) (4 Punkte)

Sei $\hat{S}$ das Einheitssimplex in $\mathbb{R}^d$. Dann ist jedes d-dimensionale Simplex S in $\mathbb{R}^d$ affin-äquivalent zu $\hat{S}$. Die (eindeutige) affine Abbildung $T : \hat{S} \to S, T(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}, b \in \mathbb{R}^d$ und $\det(A) \neq 0$ ist definiert durch $T(e_j) = a_j$ für $j = 1, \ldots, s$ sowie $T(0) = a_0$ und heißt Referenzabbildung. T ist invertierbar und es gelten die folgenden Abschätzungen, für Konstanten $c_F, C_F > 0$:

$$\|\nabla T\| = \|A\| \leq \frac{h(S)}{\rho(\hat{S})} \tag{1}$$

$$\|\nabla T^{-1}\| = \|A^{-1}\| \leq \frac{h(\hat{S})}{\rho(S)} \tag{2}$$

$$c_F \rho(S)^d \leq |\det(\nabla T)| = |\det(A)| \leq C_F h(S)^d \tag{3}$$

Dabei bezeichnet $h(S)$ den Durchmesser von S und $\rho(S)$ den Innenkugeldurchmesser von S. Beweisen Sie die Abschätzungen.

Aufgabe 2 (Besetzungsmuster) (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{T} = \left\{ (\frac{n}{8}, \frac{n+1}{8}) \,|n = 0, \ldots, 7 \right\}$ ein strukturiertes 1D-Gitter des Gebiets $\Omega = (0, 1)$ mit acht Elementen.

(a) Geben Sie das Besetzungsmuster der Systemmatrix des Poisson-Problems für die

  (i) Lagrange-Basis
  (ii) Hierachische Basis

  an.

(b) Berechnen Sie jeweils eine Orthonormalisierung der Basen und berechnen Sie das Besetzungsmuster bzgl. der orthonormalisierten Basen.

(c) Vergleichen und diskutieren Sie jeweils das Besetzungsmuster aus (a) mit dem Besetzungsmuster aus (b)? Können Sie die Basen so orthonormalisieren, dass das Besetzungsmuster erhalten bleibt?

Aufgabe 3 (Nicht-konvexes Gebiet) (4 Punkte)

Sei $S := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < r < 1, 0 < \varphi < \alpha\}$ mit $\alpha \in (0, 2\pi)$. Betrachten Sie das Dirichlet-Problem:

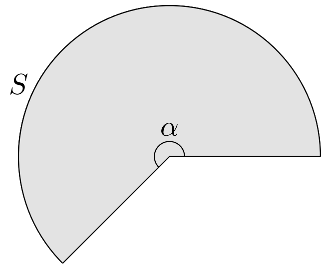
$$-\Delta u(x) = 0 \qquad x \in S \tag{4}$$

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \sin\frac{\varphi}{\alpha}\pi \qquad (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \partial S \tag{5}$$

(a) Bestimmen Sie die klassische Lösung u des Problems.
Hinweis: Betrachten Sie das Problem in Polarkoordinaten.

(b) Für welche $\alpha \in (0, 2\pi)$ gilt $u \in H^1(S)$ bzw. $u \in H^2(S)$?

(c) Es sei $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass $u \notin C^1(\bar{S})$ gilt.



Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (8 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter `https://metatron.uni-muenster.de:8000`.
Hinweis: Für die Bearbeitung dieser Programmieraufgabe haben Sie zwei Wochen zeit (Abgabe: Fr. 16.11 10 Uhr).