Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier

25.10.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 3

Abgabe: Wegen des Feiertags und der Bombenentschärfung: Montag, 5. November 2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega = B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$. Zeigen Sie, dass

$$u(x) := \ln|\ln|x|| \tag{1}$$

in $H^{1,d}(\Omega)$ ist, aber keinen stetigen Repräsentanten besitzt, d.h. dass es kein $\tilde{u} \in C^0(\Omega)$ mit $\tilde{u} = u$ fast überall gibt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $r \in (0,1)$ die Abschätzung $\ln\ln\frac{1}{r} \leq r^{-\frac{1}{4}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $B : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf X. Wir versehen $X \times X$ mit der natürlichen Norm

$$\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|. \tag{2}$$

Zeigen Sie: B ist genau dann stetig, wenn

$$\sup_{x,y\neq 0} \frac{|B(x,y)|}{\|x\|\|y\|} < \infty. \tag{3}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei X ein Hilbertraum, B eine symmetrische, stetige und koerzive Bilinearform auf X und $f \in X^*$. Nach dem Lemma von Lax und Milgram gibt es genau ein $u \in X$ mit

$$B(u,v) = f(v), \qquad \forall v \in X. \tag{4}$$

Zeigen Sie: u minimiert das Funktional

$$s(v) := \frac{1}{2}B(v,v) - f(v), \qquad v \in X. \tag{5}$$

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter `https://metatron.uni-muenster.de:8000`.