

---

Übung zur Vorlesung  
**Numerik partieller Differentialgleichungen I**  
 WiSe 2018/2019 — Blatt 2

---

**Abgabe:** Do. 25.10.2018, vor der Vorlesung

**Aufgabe 1** (Finite-Differenzen) (4 Punkte)

Geben Sie eine Diskretisierung der Laplacegleichung  $-\Delta u = 0$  in  $\mathbb{R}^2$  an, die von vierter Ordnung ist. Sie dürfen einen 9-Punkte-Stern verwenden, der die direkten und die diagonalen Nachbarn jedes Punktes enthält.

Hinweis: Der Differenzenstern kann symmetrisch über alle Spiegelachsen gewählt werden.

**Aufgabe 2** (Dirichlet'sches Prinzip) (4 Punkte)

Es sei  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  offen und beschränkt. Sei  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  und  $f \in C(\Omega)$ . Ein Energiefunktional zu

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) & \forall x \in \Omega \\ \nabla u(x) \cdot n(x) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} J : C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ J(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \, dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \end{aligned} \tag{2}$$

Zeigen Sie:

$$J(u) = \arg \min_{v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})} J(v) \iff u \text{ löst (1)}$$

**Aufgabe 3** (Transport-Problem) (4 Punkte)

Es sei  $I = [-1, 1]$ . Betrachten Sie das Transportproblem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) + u'(x, t) &= 0 & \forall x \in I, t \in [0, T] \\ u(x, 0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3}$$

- (a) Diskretisieren Sie Gleichung (3) mit dem impliziten Euler-Verfahren in der Zeit und

- Rückwärts-Differenzen
- Zentrale-Differenzen
- Vorwärts-Differenzen

im Ort. Geben Sie jeweils die Systemmatrix an.

- (b) Überprüfen Sie jeweils ob Satz 1.12 aus der Vorlesung anwendbar ist.
- (c) (Riemann-Problem) Das Transport-Problem spielt z.B. in der Chemie eine Rolle. Dabei beschreibt  $u$  die Konzentration eines chemischen Stoffes.  
Betrachten Sie das Transport-Problem (3) mit den Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4)$$

Interpretieren Sie das Verhalten der Lösung im Anwendungskontext.

**Aufgabe 4** (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter <https://metatron.uni-muenster.de:8000>.