Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Christian Engwer, Nils-Arne Dreier 11.10.2018

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen I

WiSe 2018/2019 — Blatt 1

Abgabe: Do. 18.10.2018, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Klassifikation von PDEs) (4 Punkte)

Man bestimme den Typ der Differentialgleichung

(a) $\partial_x \partial_y u - \partial_x u = 0$

(b) $\partial_x^2 u - \partial_x \partial_y u + y \partial_y^2 u + 4u = 0$

(c) $2(\partial_x + \partial_y)^2 u - \partial_y u = 0$

Hinweis: Das in der Vorlesung angegebene Kriterium für den Typ einer Gleichung kann auch bei variablen Koeffizienten separat in jedem einzelnen Ortspunkt verwendet werden.

Aufgabe 2 (Richardson Iteration (Wiederholung aus der Numerischen LA)) (4 Punkte)

Eine Vereinfachung des Jacobi-Verfahren zur Lösung eines linearen $N \times N$ Gleichungssystems $Ax = b$ ist das sog. “Richardson-Verfahren”. Dabei wird ausgehend von einem beliebigen Startvektor $x^0 \in \mathbb{R}$ mit einem Dämpfungsparameter $\theta \in \mathbb{R}$ wie folgt iteriert:

$$x^{t+1} = x^t - \theta(Ax^t - b), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

(a) Im Falle, dass A nur reelle Eigenwerte $\lambda_{\min} \leq \ldots \leq \lambda_{\max}$ besitzt, zeige man für den Spektralradius $\rho(B_\theta)$ der zugehörigen Iterationsmatrix $B_\theta = I - \theta A$ die Gleichung

$$\rho(B_\theta) = \max\{|1 - \theta\lambda_{\min}|, |1 - \theta\lambda_{\max}|\}.$$

(b) Im Falle, dass zusätzlich alle Eigenwerte positiv sind, zeige man

$$\rho(B_\theta) < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < \theta < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

(c) Für welchen Wert von θ wird $\rho(B_\theta)$ in diesem Falle minimal?

Aufgabe 3 (Green'sche Formeln) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, auf dem der Gauß'sche Integralsatz gilt. Beweisen Sie für $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ die *Green'schen Formeln*:

(a) $\int_\Omega \Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$

(b) $\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu v(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$

(c) $\int_\Omega u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\partial_\nu v(x) - v(x)\partial_\nu u(x)\,\mathrm{d}\sigma(x)$

Dabei ist $\partial_\nu u(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x)$ die Normalableitung mit äußerer Normale $\nu(x)$ an $x \in \partial\Omega$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe) (4 Punkte)

Die Programmieraufgaben finden Sie unter `https://metatron.uni-muenster.de:8000`.