Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 08.12.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 9

Abgabe: Freitag, 15.12.2017, 10:00

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand und sei $F : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u) := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \langle A(x)\nabla u(x), \nabla u(x) \rangle - g(x)u(x) \right) \mathrm{d}x,$$

wobei $g \in L^2(\Omega)$ eine gegebene Funktion ist und die Funktion $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$; $x \mapsto A(x)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $A \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n\times n})$.

(ii) Für alle $x \in \Omega$ ist die Matrix $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, d.h. $A^T(x) = A(x)$ für alle $x \in \Omega$, wobei $A^T(x)$ die zu $A(x)$ transponierte Matrix bezeichnet.

(iii) Es existiert eine Konstante $\alpha > 0$ mit

$$\alpha|\xi|^2 \le \langle A(x)\xi, \xi \rangle \quad \forall\ (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass das Minimierungsproblem

$$(P) \qquad \inf_{W_0^{1,2}(\Omega)} F$$

eine eindeutige Lösung $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzt. Leiten Sie außerdem die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung für den Minimierer $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ her.
Nehmen Sie schließlich an, dass $\bar{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ und $A \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n\times n})$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = g(x) \quad \forall\ x \in \Omega.$$

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $f \in C^1(\mathbb{R})$ und es existiere $a_1 > 0$ und $p \ge 1$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x)| \le a_1(1 + |x|^p).$$

Zeigen Sie, dass eine Konstante $a_2 > 0$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f'(x)| \le a_2(1 + |x|^{p-1}).$$

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $W : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ gegeben durch

$$W(z) := z^2(z-1)^2.$$

Sei $F : L^1(\Omega) \to [0, +\infty]$ definiert durch

$$F(u) := \int_\Omega W(u)\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Zeigen Sie: F ist unterhalbstetig bezüglich der starken Konvergenz in $L^1(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass F nicht unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist.