Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 01.12.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 8

Abgabe: Freitag, 08.12.2017, 10:00

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in (1, \infty)$ und (u_k) eine Folge in $L^p(\Omega)$, $u \in L^p(\Omega)$ mit $u_k \to u$ fast überall in Ω und $\|u_k\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$. Zeigen Sie

$$\|u_k - u\|_{L^p} \to 0 \quad \text{für } k \to +\infty,$$

d.h., u_k konvergiert gegen u stark in $L^p(\Omega)$.

Hinweis. Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $v_k := 2^{p-1}(|u|^p + |u_k|^p) - |u - u_k|^p$ und nutzen Sie Fatous Lemma.

Satz 1. *(Lemma von Fatou). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge von messbaren Funktionen mit $g_k(x) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und für fast alle $x \in \Omega$. Dann gilt*

$$\liminf_{k \to +\infty} \int_\Omega g_k(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega \liminf_{k \to +\infty} g_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig. Betrachten Sie das Funktional $F : L^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(u) := \int_\Omega f(u(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

(a) Sei $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F unterhalbstetig bezüglich der starken Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist.

(b) Sei $f(t) \geq -|t|$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass F unterhalbstetig bezüglich der starken Konvergenz in $L^1(\Omega)$ ist.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Sei $1 < p < \frac{4}{3}$, $X := \{u \in W^{1,p}(0,1) :\ u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$ und

$$F(u) := \int_0^1 \sqrt{x}(u')^2\,\mathrm{d}x \quad \forall\ u \in X.$$

Zeigen Sie, dass das Problem

$$(P) \quad \inf_{u \in X} F(u)$$

eine Lösung $\bar{u} \in X$ besitzt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie, dass F unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(0,1)$ ist.

(b) Wählen Sie eine minimierende Folge (u_n) für (P) (warum ist dies möglich?) und zeigen Sie, dass eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein $u \in W^{1,p}(0,1)$ existieren, sodass $u_{n_k} \rightharpoonup u$ schwach in $W^{1,p}(0,1)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion u aus (b) die Randbedingungen erfüllt und folgern Sie dann, dass (P) eine Lösung besitzt.

Hinweis. Beachten Sie, dass der Integrand f in diesem Problem nicht die Voraussetzung (H_2) aus Satz 3.3 der Vorlesung erfüllt. Allerdings gibt Satz 3.3 auch nur hinreichende und keine notwendigen Kriterien für die Existenz von Minimierern. Tatsächlich kann man in diesem speziellen Fall die Existenz von Minimierern beweisen, obwohl nicht alle Voraussetzungen von Satz 3.3 erfüllt sind. Beachten Sie schließlich, dass sich das vorliegende Problem anders verhält als das Weierstraß Beispiel.

Aufgabe 4 (Nikolausaufgabe) (**+5 Punkte**)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $(f \circ u) \in W^{1,1}(\Omega)$ und

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u) = (f' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Finden Sie außerdem Funktionen $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $(f \circ u) \notin W^{1,1}(\Omega)$.