Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 10.11.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 5

Abgabe: Freitag, 17.11.2017, 10:00

Aufgabe 1 (Konvexe und getrennt konvexe Funktionen) (**4 Punkte**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann sagen wir, dass f konvex ist, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Wir sagen, dass f getrennt konvex ist, falls es in jeder Variable konvex ist, das heißt, wenn die Abbildung

$$x_i \mapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

für alle $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ und für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$ konvex ist.
Zeigen Sie: Ist f konvex, so ist f auch getrennt konvex. Zeigen Sie außerdem durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 2 (**6 Punkte**)

Betrachten Sie das Funktional

$$F(u) := \int_0^1 \left(\left((u')^2 - 1 \right)^2 + |u(x)| \right) \mathrm{d}x$$

und das Minimierungsproblem

$$(P') \quad \inf\{F(u) : \ u \in X'\} =: m',$$

wobei

$$X' := \{u \in C^1_{piec}([0,1]) : \ u(0) = u(1) = 0\}.$$

Zeigen Sie: $m' = 0$. Besitzt F einen Minimierer in X'? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3 (Hamiltonsche Systeme) (**4 Punkte**)

Seien $b > a \ge 0$.

(a) (Federpendel) Betrachten Sie auf $C^1([a,b])$ das Funktional

$$F(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x))\, \mathrm{d}x$$

mit $f(u,\xi) = \frac{m}{2}\xi^2 - \frac{\kappa}{2}u^2$, $m, \kappa > 0$. Aus physikalischer Sicht beschreibt dies die Energie eines Körpers der Masse m, der in vertikaler Richtung an einer Feder auf- und abschwingt. Hierbei ist κ die Federkonstante und u beschreibt die Position des Körpers. Dann entspricht $\frac{m}{2}(u')^2$ der kinetischen und $\frac{\kappa}{2}u^2$ der potentiellen Energie.
Geben Sie die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung für $\bar{u} \in C^2([a,b])$ an sowie das zugehörige hamiltonsche System.

(b) (Fadenpendel) Betrachten Sie nun auf $C^1([a,b])$ das Funktional

$$F(u) = \int_a^b f(u(x), u'(x))\, \mathrm{d}x$$

mit $f(u,\xi) = \frac{m}{2}\xi^2 + mgl\cos\left(\frac{u}{l}\right)$. Hierbei ist $m, l > 0$ und g ist die Erdbeschleunigung. Physikalisch beschreibt dies die Energie eines ebenen Fadenpendels mit Fadenlänge l, an dem ein Körper der Masse m befestigt ist. u ist dann die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage, $\frac{m}{2}(u')^2$ entspricht wieder der kinetischen Energie und $-mgl\cos\left(\frac{u}{l}\right)$ der potentiellen Energie.
Geben Sie die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung für $\bar{u} \in C^2([a,b])$ an sowie das zugehörige hamiltonsche System.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Sei $(u, v) \in C^2([a,b]) \times C^2([a,b])$ eine Lösung des zugehörigen hamiltonschen Systems. Zeigen Sie: Ist $f = f(u, \xi)$, so ist $H(u(x), v(x))$ konstant in x.

(b) Sei nun $b > 0$. Betrachten Sie auf $C^1([0,b])$ das Funktional

$$F(u) = \int_0^b \sqrt{g(u(x))}\sqrt{1 + (u'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

für $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g \geq 0$. Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $v^2 < g(u)$ das zugehörige hamiltonsche System für $(u, v) \in C^2([0,b]) \times C^2([0,b])$ gegeben ist durch

$$(H) \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{v(x)}{c} & \forall\, x \in [0,b], \\ v'(x) = \dfrac{g'(u(x))}{2c} & \forall\, x \in [0,b], \end{cases}$$

für eine Konstante $c > 0$. Lösen Sie dann im Fall $g(u) = u^2$, $u > 0$ das hamiltonsche System und überprüfen Sie, dass die Lösung $u \in C^2([0,b])$ eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung für F ist.