Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 03.11.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 4

Abgabe: Freitag, 10.11.2017, 10:00

Aufgabe 1 (Konvexe und unterhalbstetige Funktionen) (**8 Punkte**)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dann bezeichnen wir die Menge

$$\mathrm{epi}(f) := \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \; f(x) \leq \mu\}$$

als Epigraphen von f. Weiter definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Subniveaumenge $N_\alpha(f) \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$N_\alpha(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) \leq \alpha\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) f ist unterhalbstetig,

ii) $\mathrm{epi}(f)$ ist abgeschlossen,

iii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $N_\alpha(f) \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

(b) Zeigen Sie weiterhin, dass die folgende Äquivalenz gilt:

i) f ist konvex,

ii) $\mathrm{epi}(f)$ ist konvex.

(c) Zeigen Sie schließlich: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, so ist $N_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ konvex für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht.

Aufgabe 2 (**4 Punkte**)
Sei $\mathcal{I}$ eine beiliebige Indexmenge.

(a) Sei $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie unterhalbstetiger Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen Sie: Die Funktion f definiert durch $f(x) := \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$ ist unterhalbstetig.

(b) Sei $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie konvexer Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zeigen Sie: Die Funktion f definiert durch $f(x) := \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$ ist konvex.

(c) Sei $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie stetiger Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ist f definiert durch $f(x) := \sup_{i\in\mathcal{I}} f_i(x)$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Definition 1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion. Dann definieren wir die unterhalbstetige Hülle (lower semicontinuous envelope) von f als

$$\bar{f}(x) := \sup\{g(x) : \; g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ ist unterhalbstetig, } g \leq f\}.$$

Analog definieren wir die konvexe Hülle (convex envelope) von f als

$$f^c(x) := \sup\{g(x) : \; g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ ist konvex, } g \leq f\}.$$

Per Konstruktion ist $\bar{f}$ die größte unterhalbstetige Funktion, die nach oben durch f beschränkt ist und f^c die größte konvexe Funktion, die nach oben durch f beschränkt ist.

Aufgabe 3 (Legendre-Transformierte) (**8 Punkte**)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \not\equiv +\infty$. Die Legendre-Transformierte oder Duale $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ von f ist definiert durch

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x\rangle - f(x) : \ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Analog ist die Biduale $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ von f definiert durch

$$f^{**}(x) := \sup\{\langle x, x^*\rangle - f^*(x^*) : \ x^* \in \mathbb{R}^n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f^* unterhalbstetig und konvex ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion mit $g \leq f$, so gilt $f^* \leq g^*$.

(c) Zeigen Sie: $f^{**} \leq f^c \leq f$. Zeigen Sie weiter, dass immer gilt: $f^{***} = f^*$.

(d) Verwenden Sie (ohne Beweis), dass $f = f^{**}$, falls f konvex und unterhalbstetig ist. Folgern Sie hieraus, dass im Allgemeinen gilt: $f^{**} = \overline{f^c}$, wobei $\overline{f^c}$ die unterhalbstetige Hülle von f^c ist.

(e) Sei $1 < p < \infty$ und $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{1}{p}|x|^p.$$

Berechnen Sie die Legendre-Transformierte f^*.