Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 20.10.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 2

Abgabe: Freitag, 27.10.2017

Aufgabe 1 (Euler-Lagrange Gleichung) (**6 Punkte**)

(a) Seien

$$X_1 = \{u \in C^1([0,1]) : \ u(0) = 1, \ u(1) = 2\}$$

und

$$X_2 = \{u \in C^1([-1,0]) : \ u(-1) = 1, \ u(0) = 0\}.$$

Wir betrachten die Minimierungsprobleme $\inf_{u \in X_1} F_1(u)$ und $\inf_{u \in X_2} F_2(u)$, wobei

$$F_1(u) = \int_0^1 \Big(x + (u')^2\Big)\,\mathrm{d}x \quad \forall\ u \in X_1$$

und

$$F_2(u) = \int_{-1}^0 \Big(12xu - (u')^2\Big)\,\mathrm{d}x \quad \forall\ u \in X_2.$$

Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für F_1 und F_2. Sind die Lösungen notwendigerweise Minimierer von F_1 in X_1 bzw. von F_2 in X_2?

(b) Sei nun $X = \{u \in C^1([0,\pi]) : \ u(0) = 1, \ u(\pi) = -1\}$ und

$$F(u) = \int_0^\pi \Big((u')^2 - u^2\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung für F unendlich viele Lösungen besitzt, F jedoch keinen Minimierer in X hat.

Aufgabe 2 (**6 Punkte**)

Betrachten Sie für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das Funktional

$$F(u) = \int_{-1}^1 u^2(\alpha - u')^2\,\mathrm{d}x,$$

und die Minimierungsprobleme

$$\begin{array}{lll} (P) & \inf\{F(u) : u \in X\} & =: m, \\ (P') & \inf\{F(u) : u \in X'\} & =: m', \end{array}$$

wobei

$$X = \{u \in C^1([-1,1]) : \ u(-1) = 0, \ u(1) = \alpha\}$$

und

$$X' = \{u \in C^1_{piec}([-1,1]) : \ u(-1) = 0, \ u(1) = \alpha\}.$$

(a) Lösen Sie das Problem (P') und zeigen Sie, dass $m' = 0$, d.h., finden Sie $\bar{u} \in X'$ mit $F(\bar{u}) = m' = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass ebenso gilt $m = 0$. Regularisieren Sie dazu die Funktion $\bar{u}$ aus (a) in geeigneter Weise, um eine Folge $(u_n) \subset X$ zu konstruieren mit $F(u_n) \to 0$ für $n \to +\infty$. Folgern Sie dann, dass F keinen Minimierer in X besitzt.

Aufgabe 3 (Fundamentallemma der Variationsrechnung) (**8 Punkte**)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie: $u = 0$ fast überall in Ω.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, das für alle $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} g \subset \Omega$ kompakt gilt:

$$\int_\Omega ug \,\mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

Betrachten Sie dazu die Glättung von g und nutzen Sie das unten angegebene Resultat. Wählen Sie dann die Funktion g in (1) in geeigneter Weise, um zu zeigen, dass für alle $K \subset \Omega$ kompakt gilt: $u = 0$ fast überall in K.

Proposition 1. *(Glättung von Funktionen) Sei $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\rho \geq 0$, $\operatorname{supp}\rho \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \,\mathrm{d}x = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze*

$$\rho_k(x) := k^n \rho(kx).$$

Dann definiert ρ_k eine Folge von sogenannten Glättungskernen. Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\}.$$

Wir definieren nun die Glättung u_k von u als die Faltung von u mit dem Glättunsgern ρ_k, d.h., für alle $x \in \Omega_k$ setzen wir

$$u_k(x) := (\rho_k * u)(x) = \int_\Omega \rho_k(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Dann erfüllt die Folge (u_k) die folgenden Eigenschaften:

i) $u_k \in C^\infty(\Omega_k)$ mit $D^\alpha u_k = (D^\alpha \rho_k) * u$ für alle Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, wobei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ii) $u_k \to u$ fast überall in Ω für $k \to +\infty$.

iii) Ist $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ kompakt, so ist $u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ für k hinreichend groß.