Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 15.12.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 10

Abgabe: Freitag, 22.12.2017, 10:00

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass eine Konstante $\alpha > 0$ existiert, sodass für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$|\det A - \det B| \leq \alpha(|A| + |B|)|A - B|. \tag{1}$$

Hierbei ist $|A|$ für $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$|A| := \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)} = \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Folgern Sie aus (1), dass die Determinante lokal Lipschitz ist.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand. Sei $p \geq 2$ und sei $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ für ein $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie

$$\int_\Omega \det \nabla u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \det \nabla u_0 \,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis. Zeigen Sie die Behauptung zunächst für $u, u_0 \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ mit $u = u_0$ auf $\partial\Omega$. Argumentieren Sie dann mittels Dichtheit und verwenden Sie hierbei Lemma 1 aus der Vorlesung vom 08.12.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f(\xi) = |\xi|^2 + \det \xi$. Geben Sie zwei konvexe Funktionen

$$g_1 : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (\xi, t) \to g_1(\xi, t) \qquad\qquad g_2 : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (\xi, t) \to g_2(\xi, t)$$

an mit $g_1 \not\equiv g_2$ und $g_1(\xi, \det \xi) = f(\xi) = g_2(\xi, \det \xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Bemerkung 1. Aufgabe 3 zeigt, dass für polykonvexe Funktionen $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ im Allgemeinen keine *eindeutige* konvexe Funktion $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(\xi) = g(\xi, \det \xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$ und sei F auf $W^{1,\infty}(a, b)$ definiert durch

$$F(u) = \int_a^b f(u')\,\mathrm{d}x$$

für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie analog zu Satz 1 aus der Vorlesung vom 08.12.: Ist F unterhalbstetig bezüglich der schwach $*$ Konvergenz in $W^{1,\infty}(a, b)$, so ist f konvex.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und mit Lipschitz Rand. Geben Sie ein Beispiel für ein Funktional F auf $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ der Form

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\,\mathrm{d}x$$

an mit einer nicht konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, sodass F unterhalbstetig bezüglich der schwach $*$ Konvergenz in $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ist.