Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Caterina Ida Zeppieri
Annika Bach 13.10.2017

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 17/18, Blatt 1

Abgabe: Freitag, 20.10.2017, 10:00, Briefkasten 104 (oder direkt zu Beginn in der Vorlesung)

Definition 1 (lim inf und lim sup)**.** Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ and sei (x_n) eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\lambda_n := \inf_{m\geq n} x_m \quad \text{and} \quad \Lambda_n := \sup_{m\geq n} x_m.$$

Dann gilt $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ und $\Lambda_n \geq \Lambda_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Tatsächlich gilt

$$\lambda_n = \inf\{x_n, \lambda_{n+1}\} \leq \lambda_{n+1}, \quad \Lambda_n = \sup\{x_n, \Lambda_{n+1}\} \geq \Lambda_{n+1}.$$

Folglich existieren die beiden Grenzwerte

$$\lambda := \lim_n \lambda_n = \sup_n \lambda_n \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \Lambda := \lim_n \Lambda_n = \inf_n \Lambda_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Der Limes inferior bzw. superior der Folge (x_n) ist dann definiert als

$$\liminf_n x_n := \lambda \quad \text{bzw.} \quad \limsup_n x_n := \Lambda.$$

Definition 2 (Unterhalbstetigkeit und Koerzivität)**.** Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abbildung. Dann heißt F unterhalbstetig (bzgl. d), falls für alle $u \in X$ und für jede Folge $(u_n) \subset X$ mit $u_n \overset{d}{\to} u$ (d.h., $d(u_n,u) \to 0$) gilt

$$F(u) \leq \liminf_n F(u_n).$$

F heißt oberhalbstetig (bzgl. d), falls $-F$ unterhalbstetig (bzgl. d) ist.
Weiter sagen wir, dass $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ koerziv ist, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ ein $K_t \subset X$ kompakt existiert mit $\{F \leq t\} \subset K_t$.

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie: $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist stetig bzgl. d genau dann, wenn F unterhalbstetig und oberhalbstetig bzgl. d ist.

(b) Seien nun $F, G : X \to \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig und sei $F(u) + G(u)$ für alle $u \in X$ definiert. Zeigen Sie, dass $F + G$ unterhalbstetig ist.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und d die durch die euklidische Norm $|\cdot|$ erzeugte Metrik. Sei $F : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: F ist koerziv im Sinne von Definition 2 genau dann, wenn gilt

$$\lim_{|x|\to+\infty} F(x) = +\infty.$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig und koerziv. Zeigen Sie: Es existiert

$$\min_{u\in X} F(u).$$

Aufgabe 4 (Jensensche Ungleichung) (**8 Punkte**)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die rechtsseitige Ableitung $f'(x^+)$ und die linksseitige Ableitung $f'(x^-)$ existieren und dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt

$$f'(x^-) \leq f'(x^+) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y^-) \leq f'(y^+).$$

(b) Sei $m \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ eine Stützlinie für den Graphen von f in x_0 ist, falls

$$f(x) \geq m(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ eine Stützlinie für den Graphen von f in x_0 ist genau dann, wenn $f'(x_0^-) \leq m \leq f'(x_0^+)$. Nutzen Sie dies um zu zeigen, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ mindestens eine Stützlinie für den Graphen von f in x_0 existiert.

(c) Nutzen Sie (b), um die Jensensche Ungleichung zu beweisen, d.h., zeigen Sie: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in L^1(\Omega)$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, so gilt

$$f\left(\frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx\right) \leq \frac{1}{\text{meas}(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))dx,$$

wobei meas(Ω) das Lebesgue-Maß von Ω bezeichnet.