Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 7, Abgabe: Mittwoch, 20.12.2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:
Mi. 12 - 14 Uhr M6 (Dr. Eric Siero und Judith Berendsen)

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Für welches Energiefunktional $E(u)$ ist der $H^{-1}-$Gradient gegeben durch

$$\mathrm{grad} E(u) = -\Delta u?$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Harmonischer Oszillator
Stelle die Bewegungsgleichungen auf für einen harmonischen Oszillator mit der Hamiltongleichung

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

wobei $\omega = \omega(t)$ die Eigenfreuenz des Oszillators ist und von der Zeit abhängt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Betrachte das sogenannte Wasserstein-Skalarprodukt

$$g_u(v,w) = \int u \nabla\phi \cdot \nabla\psi,$$

wobei

$$-\nabla \cdot (u\nabla\phi) = v$$
$$-\nabla \cdot (u\nabla\psi) = w.$$

Sei $E(u) = \int u \log u$ und $F(u) = \frac{1}{m-1}\int u^m$. Berechnen Sie $\mathrm{grad} E$ und $\mathrm{grad} F$.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Für $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei

$$H(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}(1 - |u|^2)$$

und

$$g(v,w) = \int v \cdot w$$
$$s(v,w) = \int v \cdot iw.$$

Wie sehen die durch s induzierten Poisson-Klammern aus? Wie sieht das Hamilton-Poisson-System aus?