Prof. Dr. Christian Seis, Dr. Eric Siero, Judith Berendsen WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 6, Abgabe: Mittwoch, 6.12.2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:
Mi. 12 - 14 Uhr M6 (Dr. Eric Siero und Judith Berendsen)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Röhrenströmung
Sei C ein Röhre, $C = (0, L) \times B_1^{\mathbb{R}^2}(0)$. In C gelten die Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p &= Ge_1 \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

Am rand der Röhre, $(0, L) \times \partial B_1(0)$, gelte no-slip, d.h. $u = 0$. In x_1-Richtung sei u L-periodisch.

(a) Schreibe die Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten.

(b) Bestimme die laminare Lösung.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Bestimme die (nicht-negative) selbstähnliche Lösung ρ_* der Wärmeleitungsgleichung der Masse 1, d.h. $\int \rho_*(t, x) dx = 1$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Lagrange-Multiplikator
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, und $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ beide C^1. Wir betrachten das Problem: minimiere $f(x)$ über alle $x \in \Omega$ so dass $g(x) = 0$.

Angenommen: es existiert ein Minimierer x_*.

Zeige: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ so dass $\nabla f(x_*) + \lambda \nabla g(x_*) = 0$.

Bemerkung: λ heißt Lagrange-Multiplikator.

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Beispiel Lagrange-Multiplikator
Sei $A = A^T$ positiv definit, d.h. $x \cdot Ax > 0$ für alle $x \neq 0$. Sei $f(x) = x \cdot Ax$, $g(x) = 1 - |x|^2$.

Berechne den Lagrange-Multiplikator.