Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 5, Abgabe: Mittwoch, 29.11.2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:
Mi. 12 - 14 Uhr M6 (Dr. Eric Siero und Judith Berendsen)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $\omega \equiv (0, 0, \omega_3)^T$ mit $w_3 > 0$.

(a) Angenommen es sei $D \equiv 0$ und $u(x) = \frac{1}{2}\omega \times x$ eine Lösung der Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen. Zeigen Sie dass der Fluss $\phi = (\phi', \phi_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ sich darstellen lässt in der Form

$$\begin{cases} \phi'(t,x) = & Q(\frac{1}{2}\omega t)x' \\ \phi_3(t,x) = & x_3 \end{cases}$$

wobei

$$Q(y) = \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}$$

die Rotationsmatrix ist.

(b) Angenommmen, es sei $D \equiv \operatorname{diag}(-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_1 + \gamma_2)$ mit $0 < \gamma_1 < \gamma_2$. Bestimmen sie $\omega(t)$, $u(t)$ und $\phi_3(t)$. Nimmt die Wirbelstärke ab oder zu? Zeigen Sie, dass

$$e^{-2\gamma_2 t}|x'|^2 \leq |\phi'(t,x)|^2 \leq e^{-2\gamma_1 t}|x'|^2.$$

Skizzieren Sie die Trajektoren.

Aufgabe 2: (3 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 21.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

(a) Sei $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $-\Delta\Psi = \omega$. (Ψ wird Strömungsfunktion genannt.) Sei

$$u := -\nabla^T\Psi = \begin{pmatrix} \partial_2\Psi \\ -\partial_1\Psi \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\nabla \times u = \omega$ gilt. (Vgl. Beweis von Lemma 12. Resultat von Lemma 12 nicht benutzen!)

(b) Zeigen Sie, dass

$$\partial_t\omega + \det\begin{pmatrix} \partial_1\Psi & \partial_2\Psi \\ \Delta\partial_1\Psi & \Delta\partial_2\Psi \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Zeigen Sie: eine Strömungsfunktion Ψ definiert eine stationäre Lösung zur 2D Euler-Gleichungen genau dann, wenn $-\Delta\Psi = F(\Psi)$ für eine Funktion F gilt.

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Radiale Euler-Wirbel
Sei $\omega = \omega(r)$ eine rotationsinvariante Lösung der 2D Euler-Vortizitäts-Gleichungen. Hier $r = |x|$.

(a) Schreiben Sie die Euler-Vortizitäts-Gleichungen für ω und die Poisson-Gleichung für die Strömungsfunktion Ψ in Polarkoordinaten auf.

(b) Zeigen Sie, dass für jede rotationssymmetrische stationäre Lösung die Beziehung

$$u(x) = \left(-\frac{x_2}{r^2}, \frac{x_1}{r^2}\right)^T \int_0^r s\omega(s)ds$$

gilt.