Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 4, Abgabe: Mittwoch, 22.11.2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:
Mi. 12 - 14 Uhr M6 (Dr. Eric Siero und Judith Berendsen)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $h : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ die Lösung der Dünnfilmgleichung

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \nabla \Delta h) = 0.$$

Hier beschreibt h die Höhe eines dünnen Flüssigkeitsfilms auf einer ebenen Fläche.

(a) Zeigen Sie dass die Oberflächenenergie abnimmt: $\frac{d}{dt} \int |\nabla h|^2 dx < 0$.

(b) Angenommmen, es besteht eine selbstähnliche Lösung, d.h., ein Lösung der Form $h(t,x) = \frac{1}{t^a} h_* \left(\frac{x}{t^b}\right)$. Bestimmen Sie a und b so dass $\int h(t,x)dx = \int h_*(x)dx$.

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie zwei linear unabhängige Lösungen von $\partial_t u = A \partial_x u$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

(a) Schreiben Sie die 1D kompressiblen Euler-Gleichungen in der Form

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + A \partial_x \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

(b) Finden Sie $p(\rho)$ so dass $\nabla \lambda_\pm \cdot r_\pm \equiv 0$, also *keine* Schocks. Hier sind $\lambda_\pm$ Eigenwerten von A und $r_\pm$ Eigenvektoren.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Wir betrachten die Burgers-Gleichung $\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$. Finden Sie die zugehörige C^1-Lösung auf ihrem maximalen Existenzinterval, wobei:

(a) $u(0,x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

(b) $u(0,x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1-x, & x \in (0,1) \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$.