Prof. Dr. Christian Seis, Dr. Eric Siero, Judith Berendsen WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 3, Abgabe: Mittwoch, 15.11.2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:
Mi. 12 - 14 Uhr M6 (Dr. Eric Siero und Judith Berendsen)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Energieerhaltung und äquivalente Systeme (Lemma 9 und 10)
Seien

$$\begin{aligned} \rho :&[0,\infty] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ u :&[0,\infty] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

C^1-Funktionen. Zeigen Sie dass:

(a) Wenn (ρ, u) ein Lösung der kompressiblen Euler-Gleichungen

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (u\rho) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla[p(\rho)] &= 0 \end{cases}$$

ist, dann gilt

$$\partial_t \left(\rho \left(\frac{1}{2}|u|^2 + \epsilon(\rho) \right) \right) + \nabla \cdot \left(\left(\rho \left(\frac{1}{2}|u|^2 + \epsilon(\rho) \right) + p(\rho) \right) u \right) = 0.$$

(b) Die Systeme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (u\rho) &= 0 \\ \partial_t(\rho u_i) + \nabla \cdot (\rho u_i u) + \partial_i[p(\rho)] &= 0, \qquad i = 1,..,d \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (u\rho) &= 0 \\ \partial_t(u_i) + u \cdot \nabla u_i + \partial_i[\pi(\rho)] &= 0, \qquad i = 1,..,d \end{cases}$$

mit $\pi(\rho) = \rho\epsilon'(\rho) + \epsilon(\rho)$, sind äquivalent.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Invarianzen der kompressiblen Euler-Gleichungen
Wir betrachten den kompressiblen Euler-Gleichungen, mit Lösung (ρ, u). Sei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $c, h \in \mathbb{R}^d$ und $Q \in O(d)$ (orthogonale Gruppe). Zeigen Sie das die folgenden $(\hat{\rho}, \hat{u})$ auch Lösungen den kompressiblen Euler-Gleichungen sind:

(a) *(Shift und Rotation Invarianz)*

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t,x) &= \rho(t+\mu, Qx+h) \\ \hat{u}(t,x) &= Q^{-1}u(t+\mu, Qx+h) \end{aligned}$$

(b) *(Gallilei Invarianz)*

$$\hat{\rho}(t,x) = \rho(t, x+tc)$$
$$\hat{u}(t,x) = u(t, x+tc) - c$$

(c) *(Skalierungsinvarianz)*

$$\hat{\rho}(t,x) = \rho(\lambda t, \lambda x)$$
$$\hat{u}(t,x) = u(\lambda t, \lambda x)$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Wir betrachten den inkompressiblen Euler-Gleichungen:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla \pi &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{cases}$$

Seigen Sie, dass die folgenden Größen in 3D erhalten sind:

(a) $\int u \cdot \omega \; dx$ (Helizität)

(b) $\frac{1}{2} \int x \times \omega \; dx$ (Drehimpuls)

(c) $\frac{1}{3} \int x \times (x \times \omega) dx$

mit $\omega = \nabla \times u$. Was sind die analogen erhaltenen Größen in 2D?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Wir betrachten die Poröse-Medien-Gleichung

$$\partial_t \rho - \Delta \rho^m = 0$$

für $m > 1$. Führen Sie folgende Variablentransformation durch: $x = t^{\alpha}\hat{x}$, $t = e^{\frac{\hat{t}}{\alpha}}$, $\rho = t^{-\alpha d}\hat{\rho}$, also

$$\rho(t,x) = t^{-\alpha d} \hat{\rho}\left(\alpha \log(t), t^{-\alpha} x\right),$$

wobei $\alpha = \frac{1}{d(m-1)+2}$.

(a) Zeigen Sie dass $\hat{\rho}$ die Gleichung

$$\partial_{\hat{t}} \hat{\rho} - \frac{1}{\alpha} \hat{\Delta} \hat{\rho}^m - \hat{\nabla}(\hat{x}\hat{\rho}) = 0 \tag{1}$$

erfüllt.

(b) Sei $\hat{\rho}_*$ eine stationäre Lösung von (1). Linearisieren Sie die Gleichung um $\hat{\rho}_*$.