

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modellierung

Übungsblatt 2, Abgabe: Mittwoch, 8.11.2017, 12.00 Uhr

Übungstermine:Mi. 12 - 14 Uhr M6 (Dr. Eric Siero und Judith Berendsen)

Aufgabe 1: (4 Punkte)Sei $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz in x mit

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq L|x - y| \quad \forall t, x, y.$$

Sei $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ der zugehörige Fluss.(a) Zeigen Sie, dass ϕ Lipschitz ist in x und dass gilt

$$e^{-tL} \leq \frac{|\phi(t, x) - \phi(t, y)|}{|x - y|} \leq e^{tL}.$$

(b) Zeigen Sie außerdem, dass gilt

$$\exp\left(-\int_0^t \|\nabla \cdot u\|_{L^\infty} ds\right) \leq J\phi_t(x) \leq \exp\left(\int_0^t \|\nabla \cdot u\|_{L^\infty} ds\right).$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)Seien u und ρ C^1 -Funktionen mit

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (u\rho) = 0.$$

Wir schreiben $\rho(t) = \rho(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.(a) Zeigen Sie, dass für alle t und $1 \leq q < \infty$ gilt

$$\|\rho(t)\|_{L^q} \leq e^{\frac{q-1}{q} \int_0^t \|\nabla \cdot u\|_{L^\infty} ds} \|\rho(0)\|_{L^q}.$$

(b) Zeigen Sie außerdem, dass gilt

$$\|\rho(t)\|_{L^\infty} \leq \|\rho(0)\|_{L^\infty} \exp\left(\int_0^t \|\nabla \cdot u\|_{L^\infty} ds\right).$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung (Lemma 5):

Seien

$$\begin{aligned}\xi &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ u &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ \phi &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d\end{aligned}$$

C^1 -Funktionen, sodass

$$\partial_t \phi(t, x) = u(t, \phi(t, x)), \quad \phi(0, x) = x.$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (i) $\partial_t \xi + u \cdot \nabla \xi = 0$
- (ii) $\xi(t, \phi(t, x)) = \xi(0, x) \quad \forall (t, x),$

d.h. ξ ist konstant entlang der Teilchentrajektorien.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Wir betrachten kompressible Eulergleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (u \rho) &= 0 \\ \partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) &= f\end{aligned}$$

Der Drehimpuls L und der Drehmoment M sind definiert durch

$$\begin{aligned}L &= \int x \times (\rho u) \, dx, \\ M &= \int x \times f \, dx.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{d}{dt} L = M.$$