Optimierung

Einführung in Optimierungsprobleme
- Minima, Maxima, zulässige Mengen, äquivalente Umformulierungen

Kriterien für Optimalität
- differenzierbarer Fall; hinreichende & notwendige Bedingung

Dualität
- Lagrange Funktion, duales Problem

Konvexe Analysis und Optimierung
- konvexe Mengen, konvexe Funktionen, Optimalitätskriterien

Optimierungsalgorithmen
- Simplex-Methode
- primal-duale Methoden
- glatte Optimierung ohne Nebenbedingungen
- Optimierung mit Nebenbedingungen

Optimierungsproblem

Beim Angeben von Optimierungsproblemen soll „min" nicht implizieren, dass das Minimum angenommen wird, sondern es steht für „minimiere über x"; ansonsten bedeutet „min" immer im Gegensatz zu „inf", dass das Minimum angenommen wird.

$$\min_x f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{sodass} \quad c_E(x) = b_E \text{ und } c_I(x) \leq b_I$$

x Optimierungsvariable

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Zielfunktion

$c_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ Gleichungs-Nebenbedingungs-Funktion

$c_I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Ungleichungs-Nebenbedingungs-Funktion

$b_E \in \mathbb{R}^p$

$b_I \in \mathbb{R}^m$

$c_I(x) \leq b_I$ ist komponentenweise gemeint

Typen von Optimierungsproblemen

lineares Programm : f, c_E, c_I linear / affin

nichtlineares Programm : f, c_E, c_I nichtlinear

konvexes Optimierungsproblem : f, c_E linear, c_I konvex (komp.-weise)

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear $\Longleftrightarrow$ $g(ax + by) = a\,g(x) + b\,g(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, a, b \in \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convex $\Longleftrightarrow$ $g(ax + (1-a)y) \leq a\,g(x) + (1-a)\,g(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, a \in [0,1]$

Andere Typen (vorerst nicht in dieser Vorlesung betrachtet) :

diskretes Optimierungsproblem : f, c_E, c_I definiert auf $\mathbb{Z}^n$

kombinatorisches Optimierungsproblem : f, c_E, c_I definiert auf $\{1, \dots, k\}^n$

Optimierung in Banachräumen : f, c_E, c_I def. auf Banach-R.

Optimierung auf Mannigfaltigkeiten : f, c_E, c_I def. auf Riemann. Mfkt

Anwendungen

Portfolio-Optimierung

- investiere optimal Geld in n Aktien; x_i = Investment in Aktie i
- Nebenbedingungen an Gesamtbudget, Positivität, ...
- Zielfunktion: Gesamtrisiko, Varianz des Einkommens, ...

Prozess- oder Produktoptimierung

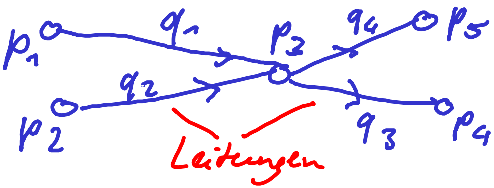
- x_i = Produktionsmenge von Produkt i
- Nebenbedingungen durch begrenzte Ressourcen, Produktionskapazität, ...
- Zielfunktion: Profit

Daten-Fitting

- x = Modellparameter
- Nebenbedingungen: A-priori-Information (Positivität etc.)
- Zielfunktion: Diskrepanz zu gemessenen Daten

Beispiel 1: Optimierung eines Hochdruck-Gasnetzwerks

- Netzwerk



q_i = Flüsse
p_i = Drücke
d_i = Verbrauch

- Massennebenbedingung in Knoten 3 : $\quad q_1 + q_2 - q_3 - q_4 - d_3 = 0$

  im Allg. $\quad Aq - d = 0$ $\quad$ lineare Nebenbedingung

  dünnbesetzte Matrix

- Leitungsnebenbedingung in Leitung 1: $\quad p_3^2 - p_1^2 + k_1 q_1^\alpha = 0$

  im Allg. $\quad p^T B p + g(q) = 0$ $\quad$ quadratische / nichtlineare NB

- Kompressornebenbedingung : $\quad q_6 - q_7 + z\, h(p_6, q_6, p_7, q_7) \geq 0$

  im Allg. $\quad Cq + z \cdot h(p, q) \geq 0$ $\quad$ diskrete / nichtlineare NB

$$z = \begin{cases} 0 & \text{falls Kompr. an} \\ 1 & \text{falls aus} \end{cases}$$

- Schranken $p \leq p_{max}$

- Ziel: minimiere Versorgungskosten / Kompressorkosten etc.

Beispiel 2: Least squares fitting

$$\min \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} (a_i^T x - b_i)^2, \quad A \in \mathbb{R}^{k \times n}, \; b \in \mathbb{R}^k, \; k \geq n$$

Zeilen von A

Finde Minimum durch Gleichsetzen der Ableitung mit 0

$$0 = A^T(Ax - b)$$

falls $A^T A$ invertierbar, gilt

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

Pseudoinverse $\quad A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$

Klassische Bildverarbeitungsanwendung: Unschärfekorrektur

x = Vektor der Grauwerte der korrekten Bildpixel

b = gemessene (unscharfe) Grauwerte

A = Unschärfematrix

Unterschied zur Variationsrechnung

- beide Felder sind eng verwandt
- Variationsrechnung untersucht Existenz von Minimierern und ihre Eigenschaften, typischerweise mit "Energiemethoden"
- Optimierung versucht Minimierer zu finden und leitet Kriterien für Optimalität her; Betonung von numerischen Methoden

Fahrplan der Vorlesung

- Einführung in Optimierungsprobleme

  (Minima, Maxima, zulässige Mengen, äquivalente Umformulierungen)

- Kriterien für Optimalität

  (differenzierbarer Fall; hinreichende und notwendige Bedingungen)

- Dualität

  (Lagrange-Funktion, duales Problem)

- Konvexe Optimierung

  (konvexe Mengen, konvexe Funktionen, Optimalitätskriterien)

- Optimierungsalgorithmen

  - Simplex-Methode
  - primal-duale Methoden
  - glatte Optimierung ohne Nebenbedingungen
  - Optimierung mit Nebenbedingungen

Grundlegende Notation

$$\min \ f(x) \quad \text{sodass} \quad c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \ c_{\mathcal{I}}(x) \leq 0 \ (\text{pt.-weise}) \quad (*)$$

(*) beschreibt das Problem dasjenige $x \in \mathbb{R}^n$ zu finden, das f unter allen x minimiert, die die NB erfüllen.

Notation:

- $f \equiv f_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- $c_{\mathcal{I}} \equiv (f_1, \ldots, f_m)^T : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^m$
- $c_{\mathcal{E}} \equiv (h_1, \ldots, h_p)^T : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^p$

__Def:__ __Gebiet von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$__ : $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \infty\}$

__Def:__ __Gebiet des Optimierungsproblems__ (*): $\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{dom} h_i$

Grundlegende Begriffe

Def:
- $x \in \mathcal{D}$ ist <u>zulässig</u>, wenn alle Nebenbedingungen $f_1(x), \dots, f_m(x) \leq 0$ und $h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0$ erfüllt sind
- (*) ist <u>zulässig</u>, falls es ein zulässiges $x \in \mathcal{D}$ gibt

Def:
- $p^* = \inf \{ f_0(x) \mid x \in \mathcal{D} \text{ is feasible} \}$ heißt <u>optimaler Wert</u>
- falls (*) nicht zulässig ist, setzen wir $p^* := \infty$
- falls $\exists\, x_k \in \mathcal{D}$ zulässig mit $f_0(x_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} -\infty$, dann $p^* = -\infty$; (*) heißt dann <u>unbeschränkt nach unten</u>

Def:
- x^* heißt <u>(global) optimaler Punkt</u> falls x^* zulässig ist und $f(x^*) = p^*$
- $X_{opt} = \{ x \in \mathcal{D} \mid x \text{ ist optimaler Punkt} \}$
- Ein zulässiger Punkt x mit $f_0(x) \leq p^* + \varepsilon$ heißt <u>ε-suboptimal</u>
- Ein zulässiger Punkt x heißt <u>lokal optimal</u> wenn $\exists R > 0$ s.d.
$$f_0(x) = \inf \{ f_0(z) \mid z \in \mathcal{D} \text{ ist zulässig}, \ \|z - x\| \leq R \}$$
- Ein lokal/global optimaler Punkt x heißt <u>strikt optimal</u>, wenn $\exists R > 0$ s.d. $f_0(x) < f_0(y)$ für alle zulässigen $y \in \mathcal{D}$ mit $y \neq x$, $\|x - y\| \leq R$

Beispiele

Optimierungsprobleme auf $\mathbb{R}_{++} := \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$

1) $f_0(x) = \frac{1}{x}$ $\quad p^* = 0 \,, \; X_{opt} = \emptyset$

2) $f_0(x) = -\log x$ $\quad p^* = -\infty \,, \; X_{opt} = \emptyset$

3) $f_0(x) = x \log x$ $\quad p^* = -\frac{1}{e} \,, \; x^* = \frac{1}{e} \,, \; X_{opt} = \{ \frac{1}{e} \}$

Thm: Sei (*) ein konvexes Optimierungsproblem, d.h. $f_0, \ldots, f_m$ sind konvex, $h_1, \ldots, h_p$ affin. Dann gilt (x^* lokal optimal) $\Longleftrightarrow$ (x^* global optimal).

Bew: HA

Equivalent optimization problems

- (*) ist die <u>Standardform</u> eines Optimierungsproblems. Die meisten Optimierungsprobleme können so ausgedrückt werden. Bspw. kann eine Gleichungs-NB $g_i(x) = \tilde{g}_i(x)$ äquivalent umgeformt werden zu $h_i(x) := g_i(x) - \tilde{g}_i(x) = 0$, oder eine Ungleichung $\tilde{f}_i(x) \geq 0$ mit verkehrter Richtung ist äquivalent zu $f_i(x) := -\tilde{f}_i(x) \leq 0$.

- Man nennt zwei Optimierungsprobleme äquivalent, wenn sich die Lösung des einen jeweils leicht aus der Lösung des anderen berechnen lässt.

Bsp.: $\min \tilde{f}_0(x) = \alpha_0 f_0(x)$

sodass $\tilde{f}_i(x) = \alpha_i f_i(x) \leq 0$, $\tilde{h}_j(x) = \beta_j h_j(x) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$

ist für $\alpha_i > 0$, $\beta_j \neq 0$ äquivalent zu

$\min f_0(x)$ sodass $f_i(x) \leq 0$, $h_j(x) = 0$

Einfache Umformungen I

(P_1) $\min f_0(x)$ s.d. $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $h_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, p$

(P_2) $\min \tilde{f}_0(x)$ s.d. $\tilde{f}_i(x) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\tilde{h}_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, p$

- Substitution von Variablen

Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijectiv,

$\tilde{f}_i = f_i \circ \phi$, $i = 0, \ldots, m$, $\tilde{h}_i = h_i \circ \phi$, $i = 1, \ldots, p$

Löst x (P_1), so löst $\phi^{-1}(x)$ (P_2) und umgekehrt.

- Transformation von Ziel- und Nebenbedingungs-Funktionen

Sei $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt monoton wachsend

$\psi_1, \ldots, \psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\psi_i(u) \leq 0 \iff u \leq 0$

$\phi_1, \ldots, \phi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi_i(u) = 0 \iff u = 0$

$\tilde{f}_i = \psi_i \circ f_i$, $i = 0, \ldots, m$, $\tilde{h}_i = \phi_i \circ h_i$, $i = 1, \ldots, p$

Es gilt $X_{opt}^{(P_1)} = X_{opt}^{(P_2)}$

Einfache Umformungen II

(P_1) min $f_0(x)$ s.d. $f_i(x) \leq 0$, $i=1,\dots,m$, $h_i(x)=0$, $i=1,\dots,p$

- Slack-Variablen s_i: Nutze $f_i(x) \leq 0 \iff \exists s_i \geq 0 : f_i(x) + s_i = 0$

  (P_2) min $f_0(x)$ s.d. $s_i \geq 0$, $i=1,\dots,m$, $f_i(x)+s_i=0$, $h_j(x)=0$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,p$

  (x,s) zulässig (optimal) für $(P_2) \iff x$ zulässig (optimal) für (P_1) & $s_i := -f_i(x)$

- Eliminierung von Gleichungs-Nebenbedingungen

  Wenn $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0\}$ parametrisiert werden kann durch $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, d.h. $x \in C \iff \exists z \in \mathbb{R}^k : x = \phi(z)$, ...

  $\tilde{f}_i = f_i \circ \phi$, $i=0,\dots,m$

  (P_2) min $\tilde{f}_0(x)$ s.d. $\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_m(x) \leq 0$

  $X_{opt}^{(P_1)} = \phi(X_{opt}^{(P_2)})$

  <u>Bsp</u>: $h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0 \iff Ax = b$ (lineare NB)

  Setze $\phi(z) = Fz + x_0$ für $F \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit range $F = \ker A$, x_0 zulässig

Einfache Umformungen III

(P_1) $\min f_0(x)$ s.d. $f_i(x) \leq 0,\ i=1,\dots,m,\quad h_i(x)=0,\ i=1,\dots,p$

- implizite Nebenbedingungen

Sei $F(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{falls } f_1(x),\dots,f_m(x)\leq 0,\ h_1(x)=\dots=h_p(x)=0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$

(P_2) $\min F(x)$

$X_{opt}^{(P_2)} = X_{opt}^{(P_1)}$

<u>Bsp.</u>: $\min \begin{cases} \|x\|^2 & \text{falls } Ax=b \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \iff \min \|x\|^2$ s.d. $Ax=b$

- Optimierung über eine Variable

Sei $x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$; $\tilde{F}(x_1) = \inf \{ f_0(x_1,x_2) \mid f_1(x_1,x_2),\dots,f_m(x_1,x_2) \leq 0,\ h_1(x_1,x_2)=\dots h_p(x_1,x_2)=0 \}$

(P_2) $\min \tilde{F}(x_1)$

$x_1 \in X_{opt}^{(P_2)} \iff \exists\, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2) \in X_{opt}^{(P_1)}$

hilfreich, wenn Minimierung über x_2 explizit durchgeführt werden kann

Einfache Umformungen IV

(P_1) $\min f_0(x)$ s. . $f_i(x) \le 0$, $i = 1, \dots, m$, $h_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, p$

- Epigraph-Formulierung

(P_2) $\min\limits_{t,x} t$ s.d. $f_0(x) - t \le 0$, $f_1(x), \dots, f_m(x) \le 0$, $h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0$

$(x, t) \in X_{opt}^{(P_2)} \iff x \in X_{opt}^{(P_1)}$ und $f_0(x) = t$

- verallgemeinerte Epigraph-Formulierung

Sei $f_0(x) = \sum\limits_{j=1}^{M} g_j(x)$

(P_2) $\min\limits_{t_1, \dots, t_M, x} \sum\limits_{j=1}^{M} t_j$ s.d. $g_j(x) - t_j \le 0$, $j = 1, \dots, M$ + andere NB

$(x, t_1, \dots, t_M) \in X_{opt}^{(P_2)} \iff x \in X_{opt}^{(P_1)}$ und $g_j(x) = t_j$, $j = 1, \dots, M$

Motivation und Notation

Optimalitätsbedingungen

- zeigen an, wann ein Punkt optimal ist (notwendige Bedingung)
- garantieren, dass eine mögliche Lösung tatsächlich (lokal) optimal ist (hinreichende Bedingung)
- helfen beim Design von Algorithmen

Annahme & Notation

- Im Folgenden nehmen wir immer an, dass $f_0, \ldots, f_m, h_1, \ldots, h_p$ stetig differenzierbar sind bis zur Ordnung, die für ein Resultat benötigt wird (z.B. einmal für erste Ordnungs-Bedingungen)
- $Df = (\partial f / \partial x_1, \ldots, \partial f / \partial x_n)$, $\nabla f = Df^T$
- $D^2 f = \begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x_1^2, & \ldots, & \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^2 f / \partial x_n \partial x_1, & \ldots, & \partial^2 f / \partial x_n^2 \end{pmatrix}$

Optimality criteria: Unconstrained optimization Fall $m = p = 0$

1. Ordnung notwendige Bedingung

<u>Thm</u>: Wenn x^* lokales optimal für (*) ist, dann gilt $Df_0(x^*) = 0$.

Bew: Per Widerspruch: Nimm an, $Df_0(x^*) \neq 0$.

Mit Taylors Satz gilt für $\alpha > 0$ „klein-o-Notation"

$$f_0(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) = f_0(x^*) + Df_0(x^*)(-\alpha \nabla f_0(x^*)) + o(\|\alpha \nabla f_0(x^*)\|)$$

$$= f_0(x^*) - \underbrace{\alpha \|\nabla f_0(x^*)\|^2}_{A} + \underbrace{o(\alpha \|\nabla f_0(x^*)\|)}_{B}$$

Für alle $\alpha > 0$ klein genug gilt $B < A$, sodass

$$f_0(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) < f_0(x^*)$$

$\Rightarrow$ x^* kann nicht lokal optimal sein $\square$

„klein-o-Notation": Wir schreiben $o(g(s))$, wenn wir uns auf eine Funktion $f(s)$ beziehen mit $\lim\limits_{s \to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = 0$.

2. Ordnung notwendige Bedingung

Thm: Wenn x^* lokal optimal für $(*)$ ist, dann gilt $Df_0(x^*)=0$, und $D^2 f_0(x^*)$ ist positiv semi-definit, d.h.

$$s^T D^2 f_0(x^*)\, s \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Bew: Per Widerspruch; Nimm an, $\exists s \in \mathbb{R}^n :: s^T D^2 f_0(x^*)\, s < 0$.

Wir wissen schon $Df_0(x^*) = 0$.

Mit Taylors Satz folgt für $\alpha > 0$

$$f_0(x^* + \alpha s) = f_0(x^*) + \underbrace{\tfrac{1}{2} (\alpha s)^T D^2 f_0(x^*)(\alpha s)}_{A<0} + \underbrace{o(|\alpha s|^2)}_{B}$$

Für alle $\alpha > 0$ klein genug gilt $B < |A|$, so dass

$$f_0(x^* + \alpha s) < f_0(x^*)$$

$\Rightarrow$ x^* kann nicht lokal optimal sein $\square$

2. Ordnung hinreichende Bedingung

Thm: Wenn $Df_0(x^*) = 0$ und $D^2 f_0(x^*)$ positiv definit ist, d.h.

$$s^T D^2 f_0(x^*) s > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

dann ist x^* ein strikt lokal optimaler Punkt.

Bew: Wegen Stetigkeit ist $D^2 f_0(x)$ pos. def. für alle x in einem offenen Ball $B_r(x^*)$ um x^*.

Sei $x \in B_r(x^*)$, $x \neq x^*$. Mit Taylors Satz $\exists z$ zwischen x & x^* mit

$$f_0(x) = f_0(x^*) + \underbrace{Df_0(x^*)(x - x^*)}_{0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(x - x^*)^T D^2 f_0(z)(x - x^*)}_{>0}$$

$$> f_0(x^*)$$

$\square$

Beispiel in IR²

Finde lokales Minimum von $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 - 2x_1^2 - 8x_1 x_2 - 2x_2^2$

1. Ordn. notwendige Bed.: $0 = \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 \\ 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 3x_1^2 - 4x_2 - 8x_1 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $x = (0,0)$ or $x = (1,1)$

2. Ordn. notwendige Bed.: $D^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 6x_2 - 4 & 6x_1 + 6x_2 - 8 \\ 6x_1 + 6x_2 - 8 & 6x_1 + 6x_2 - 4 \end{pmatrix}$

$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$ nicht pos. semi-def. (Determinante < 0)

lokales Maximum oder Sattel?

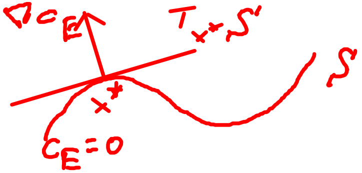
2. Ordn. hinreichende Bed.: $D^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ pos def. (alle Minoren pos.)

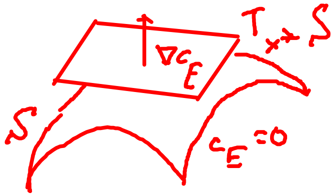
$\Longrightarrow$ $(1,1)$ ist einziger lokal optimaler Punkt

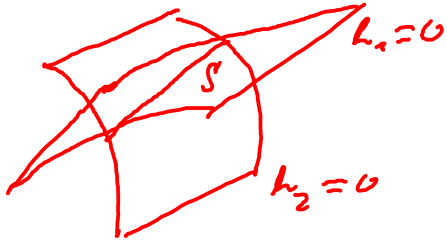
Tangentialebene und reguläre Punkte

Ein Satz Gleichungs-Nebenbedingungen $0 = c_E(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_p(x) \end{pmatrix}$ definiert eine niederdimensionale Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ (typischerweise $(n-p)$-dimensional).

Grob gesagt gilt: c_E glatt $\Rightarrow S$ glatt – doch was kann an nicht-regulären Punkten passieren?







Def:
- Eine <u>Kurve auf S</u> ist eine stetige Abbildung $x : [a,b] \to S$.
- x <u>verläuft durch</u> $x^* \in S$, wenn $\exists\, t^* \in [a,b] : x(t^*) = x^*$.
- Die <u>Tangentialebene</u> $T_{x^*}S$ an S in x^* ist die Menge

$$T_{x^*}S = \{\dot{x}(t^*) \mid x \text{ ist differenzierbare Kurve auf } S \text{ mit } x(t^*) = x^*\}$$

Def: $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $c_E(x^*) = 0$ heißt <u>regulär</u>, falls $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*)$ linear unabhängig sind.

Tangentialebene an regulären Punkten

Thm: An einem regulären Punkt x^* der Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_E(x) = 0\}$ gilt
$$T_{x^*}S = \{y \mid Dc_E(x^*)\, y = 0\}.$$

Bew: „$\subset$": Sei $y \in T_{x^*}S$, d.h. $\exists\, x : [a,b] \to S$, $t^* \in [a,b]$, $x(t^*) = x^*$, $\dot{x}(t^*) = y$.

$$c_E(x(t)) = 0 \implies 0 = [c_E(x(t))]'\Big|_{t=t^*} = Dc_E(x(t^*))\,\dot{x}(t^*)$$

„$\supset$": Sei $Dc_E(x^*)\,y = 0$.

Idee: Finde Kurve $t \mapsto x^* + ty + Dc_E(x^*)^T u(t)$ auf S.

Betrachte $F : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^p$, $F(t,u) = c_E(x^* + ty + Dc_E(x^*)^T u)$.

$F(0,0) = 0$, $D_u F(0,0) = Dc_E(x^*)\, Dc_E(x^*)^T$ ist invertierbar

$\xRightarrow{\text{Impl. Fkt. Thm.}}$ $\exists$ stetiges $u : [-a,a] \to \mathbb{R}^p$ s.d. $F(t, u(t)) = 0$

$\implies$ $x(t) = x^* + ty + Dc_E(x^*)^T u(t)$ ist Kurve auf S

$\implies 0 = \frac{d}{dt} c_E(x(t))\Big|_{t=0} = Dc_E(x^*)\,y + Dc_E(x^*)\,Dc_E(x^*)^T \dot{u}(0)$

$\implies \dot{u}(0) = 0 \implies \dot{x}(0) = y + Dc_E(x^*)^T \dot{u}(0) = y$ $\square$

Optimalitätskriterien: Gleichungs-Nebenbedingungen case $m = 0$

1. Ordnung notwendige Bedingung I

<u>Lemma</u>: Wenn x^* lokal optimal für $(*)$ und regulär bzgl. c_E ist, gilt

$$Df_0(x^*)\,y = 0$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Dc_E(x^*)\,y = 0$.

Bew.: Sei $Dc_E(x^*)\,y = 0 \xRightarrow{\text{vorheriges Thm}} y \in T_{x^*}S$ für $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_E(x) = 0\}$

$\Longrightarrow \exists\, x : [-a, a] \to S$ differenzierbar, $\dot{x}(0) = y$, $x(0) = x^*$.

- x^* ist lokal optimal für $(*)$

$\Longrightarrow$ $t = 0$ ist lokal optimal für $t \mapsto f_0(x(t))$

$\Longrightarrow$ $0 = \left[f_0(x(t))\right]'\Big|_{t=0} = Df_0(x^*)\,y$ $\square$

Interpretation: $\nabla f_0(x^*)$ ist orthogonal zu Tangentialebene

Optimalitätskriterien: Gleichungs-Nebenbedingungen

1. Ordnung notwendige Bedingung II

Thm: Ist x^* lokal optimal für $(\ast)$ und regulär bzgl. c_E, dann $\exists$ Lagrange Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^p$ s.d. $Df_0(x^*) + \lambda^T Dc_E(x^*) = 0$.

Bew: Setze $A = Dc_E(x^*)$ und $g = \nabla f_0(x^*)$

Seien die Spalten von N eine Basis von $\ker A = (\operatorname{range} A^T)^\perp$

$\Rightarrow \quad g = -A^T\lambda + Nz$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $z \in \mathbb{R}^{n-p}$

Voriges Lemma impliziert $N^T g = 0$, d.h.

$$0 = -N^T A^T \lambda + N^T N z = N^T N z.$$

Doch N hat vollen Rang, sodass $z = 0$.

$\Rightarrow \quad g = -A^T \lambda$ $\square$

Interpretation: $\nabla f_0(x^*)$ ist Linearkomb. von $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*)$

2. Ordnung notwendige Bedingung

Thm: Ist x^* lokal optimal für (*) und regulär bzgl. c_E, dann $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^p$ mit $Df_0(x^*) + \lambda^T Dc_E(x^*) = 0$ und

$$D^2 f_0(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k D^2 h_k(x^*)$$

ist positiv semidefinit auf $T_{x^*}S$ für $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_E(x) = 0\}$.

Bew: Sei $x(t)$ eine Kurve auf S mit $x(0) = x^*$.

Wegen der 2. Ordnung notwendigen Bedingung für Optimierung ohne NB gilt

$$0 \le \frac{d^2}{dt^2} f_0(x(t))\Big|_{t=0} = \dot{x}(0)^T D^2 f_0(x(0))\dot{x}(0) + Df_0(x(0))\,\ddot{x}(0).$$

Außerdem impliziert $0 = \lambda^T c_E(x(t))$

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} \lambda^T c_E(x(t))\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \dot{x}(0)^T D^2 h_k(x(0))\,\dot{x}(0) + \lambda^T Dc_E(x(0))\,\ddot{x}(0)$$

Addition beider Gleichungen und Nutzung der 1. Ordn.-Bedingung

$$\Rightarrow \quad 0 \le \dot{x}(0)^T \left[D^2 f_0(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k D^2 h_k(x^*)\right] \dot{x}(0),$$

worin $\dot{x}(0) \in T_{x^*}S$ beliebig war. $\square$

2. Ordnung hinreichende Bedingung

Thm: Wenn $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ existieren mit

$$c_E(x^*) = 0, \quad Df_0(x^*) + \lambda^T Dc_E(x^*) = 0,$$

$$D^2 f_0(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k D^2 h_k(x^*) \text{ pos. def. on } T_{x^*}S,$$

dann ist x^* strikt lokal optimal für (*).

Bew: Nimm das Gegenteil an, d.h. $\exists$ Folge $y_k = x^* + \delta_k s_k$, $\delta_k > 0$, $\delta_k \to 0$, $|s_k| = 1$ mit $c_E(y_k) = 0$ und $f_0(y_k) \leq f_0(x^*)$.

s_k beschränkt $\Rightarrow$ Teilfolge konvergiert. OBdA $s_k \to s^*$.

$0 = c_E(y_k) - c_E(x^*)$; dividiere durch δ_k und lasse $k \to \infty \Rightarrow Dc_E(x^*) s^* = 0$.

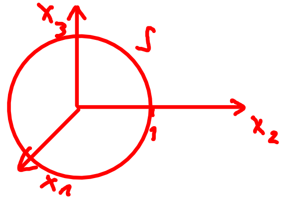
Taylors Satz:
$$0 \geq f_0(y_k) - f_0(x^*) = \delta_k Df_0(x^*) s_k + \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T D^2 f_0(\eta_0) s_k \quad (E_0)$$
$$0 = h_i(y_k) - h_i(x^*) = \delta_k Dh_i(x^*) s_k + \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T D^2 h_i(\eta_i) s_k \quad (E_i)$$

für η_i zwischen x^* und y_k, $i = 1, \ldots, p$

$$(E_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (E_i) \Rightarrow 0 \geq \frac{\delta_k^2}{2} s_k^T \left[D^2 f_0(\eta_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D^2 h_i(\eta_i) \right] s_k \quad \forall k \quad ⚡ \quad \square$$

Beispiel

Löse $\min_{x\in\mathbb{R}^3} |x-(0,2,0)|^2$ s.d. $h_1(x)=|x|^2-1=0$, $h_2(x)=x_1=0$



1. Ordnung notwendige Bed: $0=\nabla f(x)+\lambda_1\nabla h_1(x)+\lambda_2\nabla h_2(x) = 2\left(x-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)+2\lambda_1 x+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$0=h_1(x)$

$0=h_2(x)$

$\Longrightarrow \quad x_1=0, \quad x_3=0, \quad x_2=\pm 1, \quad \lambda_2=0, \quad \lambda_1=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$

2. Ordnung notwendige Bed: $D^2 f\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\lambda_1 D^2 h_1\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2 D^2 h_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=2I+2\lambda_1 I \ll 0$

$\Longrightarrow$ kein lokales Minimum

2. Ordnung hinreichende Bed: $D^2 f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_1 D^2 h_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2 D^2 h_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=2I+2\lambda_1 I \gg 0$

$\Longrightarrow$ lokales Minimum

Aktive Menge & reguläre Punkte

Def: · Sei x^* zulässig, d. h. $h_1(x^*) = \dots = h_p(x^*) = 0$, $f_1(x^*), \dots, f_m(x^*) \le 0$.

Sei $\mathcal{J}$ die Menge an Indizes j mit $f_j(x^*) = 0$.

Die Menge an Nebenbedingungen $f_j(x^*) \le 0$, $j \in \mathcal{J}$, heißt aktive Menge, $f_j(x^*) \le 0$, $j \notin \mathcal{J}$, heißt inaktive Menge.

Manchmal zählen wir die Gleichungsnebenbedingungen mit zur aktiven Menge.

· x^* heißt regulärer Punkt wenn $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_p(x^*), \nabla f_j(x^*)$, $j \in \mathcal{J}$, linear unabhängig sind.

In einer Umgebung von x^* kann die inaktive Menge vollständig ignoriert werden!

Optimalitätskriterien: Ungleichungs-Nebenbedingungen

Karush-Kuhn-Tucker (KKT)-Bedingungen

<u>Thm</u>: Wenn x^* ein lokal optimaler Punkt für (*) und regulär ist, dann gibt es Lagrange-Multiplikatoren $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ mit

$$c_E(x^*) = 0, \quad c_I(x^*) \leq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \mu\, c_I(x^*) = 0$$

Komplementaritätsbedingung (komp.-weise)

d.h. mindestens μ_i oder $(c_I(x^*))_i$ ist 0

$$Df_0(x^*) + \lambda^T Dc_E(x^*) + \mu^T Dc_I(x^*) = 0$$

Bew: · Komplementaritätsbedingung

$\iff$ $\mu_i \neq 0$ nur dann wenn $i \in \mathcal{J}$ für die aktive Menge $\mathcal{J}$

· x^* ist lokal optimal

$\Rightarrow$ x^* ist auch lokal optimal für Nebenbedingungen $c_E(x) = 0$, $f_i(x) = 0$, $i \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow$ $0 = Df_0(x^*) + \lambda^T Dc_E(x^*) + \mu^T Dc_I(x^*)$ für $\lambda \in \mathbb{R}^p$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ mit $\mu_i = 0$ falls $i \notin \mathcal{J}$

· Annahme $\mu_k < 0$; sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c_E(x) = 0,\ f_i(x) = 0 \ \forall i \in \mathcal{J} \setminus \{k\}\}$;

wegen Regularität $\exists\, y \in T_{x^*}S$: $Df_k(x^*)\, y < 0$; sei x eine Kurve S mit $x(0) = x^*$, $\dot{x}(0) = y$

$\Rightarrow$ $x(t)$ ist zulässig für $t \geq 0$ klein genug und $\frac{d}{dt} f_0(x(t))\big|_{t=0} = Df_0(x^*)\, y = -\mu_k Df_k(x^*)\, y < 0$ ↯

□

2. Ordnung notwendige Bedingung

Thm: Wenn x^* ein lokal optimaler Punkt für (X) und regulär ist, dann $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^p, \mu \in \mathbb{R}^m$ sodass zusätzlich zu den KKT-Bedingungen gilt, dass

$$D^2 f_0(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k D^2 h_k(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \mu_k D^2 f_k(x^*)$$

pos. semi-definit auf dem Tangentialraum an alle aktiven Nebenbedingungen.

Bew: · x^* ist lokal optimal

$\Rightarrow$ x^* ist auch lokal optimal für Nebenbedingungen $c_E(x) = 0$, $f_i(x) = 0$, $i \in \mathcal{I}$

$\Rightarrow$ benutze 2. Ordnung notwendige Bedingung für Gleichungsnebenbedingungen $\square$

2. Ordnung hinreichende Bedingung

Thm: x^* ist ein strikt lokal optimaler Punkt von (*) wenn $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}^p,\ \mu \in \mathbb{R}^m$ sodass

$$c_E(x^*) = 0,\quad c_I(x^*) \leq 0,\quad \mu \geq 0,\quad \mu\, c_I(x^*) = 0 \quad \text{(komp.-weise)}$$

$$Df_0(x^*) + \lambda^T D c_E(x^*) + \mu^T D c_I(x^*) = 0$$

und $D^2 f_0(x^*) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k D^2 h_k(x^*) + \sum_{k=1}^{m} \mu_k D^2 f_k(x^*)$

pos. definit auf $\{ y \in \mathbb{R}^n \mid Dc_E(x^*)\, y = 0,\ Df_i(x^*)\, y = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } \mu_i > 0 \}$.

Bew: · Annahme: x^* ist nicht strikt optimal, aber die Bedingungen sind erfüllt.

Sei $y_k = x^* + \delta_k s_k$ zulässig mit $\delta_k > 0$, $|s_k| = 1$, $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x^*$ sodass $f_0(y_k) \leq f_0(x^*)$

· OBdA $\delta_k \to 0$, $s_k \to s^*$, $0 \geq Df_0(x^*)s^*$, $0 = Dc_E(x^*)s^*$ ⇐ wie im Fall von Gleichungsnebenbedingungen

· für jede (aktive) Nebenbedingung f_j mit $\mu_j > 0$, $f_j(y_k) - f_j(x^*) \leq 0 \Rightarrow Df_j(x^*)s^* \leq 0$

→ wenn $Df_j(x^*)s^* < 0$ für ein j, dann $0 \geq Df_0(x^*)s^* = -\lambda^T Dc_E(x^*)s^* - \mu^T Dc_I(x^*)s^* > 0$ ↯

→ wenn $Df_j(x^*)s^* = 0$ für alle aktiven Nebenbedingungen, benutze Beweis für Gleichungsnebenbedingungen. □

Optimalitätskriterien: Ungleichungs-Nebenbedingungen

Beispiel

Löse $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} |x-(0,2,0)|^2$ s.d. $f_1(x) = |x|^2-1 \leq 0$, $f_2(x) = x_1 - \frac{1}{2} \leq 0$

1. Ordnung notwendige Bed:

$$0 = \nabla f(x) + \mu_1 \nabla f_1(x) + \mu_2 \nabla f_2(x) = 2\left(x - \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right) + 2\mu_1 x + \mu_2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$0 \geq f_1(x), \quad 0 \leq \mu_1, \quad \mu_1 f_1(x) = 0$$

$$0 \geq f_2(x), \quad 0 \leq \mu_2, \quad \mu_2 f_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0$$

2. Ordnung hinreichende Bed:

$$D^2 f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu_1 D^2 f_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mu_2 D^2 f_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2I + 2\mu_1 I = 4I >> 0$$

$\Rightarrow$ lokales Minimum

Lagrange-duale Funktion

Erinnerung: $(*)$ $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x)$ s.d. $c_I(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \leq 0$, $c_E(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_p(x) \end{pmatrix} = 0$

mit Gebiet $\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i \cap \bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{dom} h_j$

Def.: Die Lagrange-Funktion zu $(*)$ ist $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\operatorname{dom} L = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$,

$$L(x,\mu,\lambda) = f_0(x) + \mu^T c_I(x) + \lambda^T c_E(x).$$

- μ, λ heißen duale Variablen oder Lagrange-Multiplikatoren von $(*)$
- x heißt primale Variable
- $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $g(\mu,\lambda) = \inf_{x\in\mathcal{D}} L(x,\mu,\lambda)$ heißt (Lagrange-) duale Funktion

Thm: Die duale Funktion g ist konkav (d.h. $-g$ ist konvex).

Bew: $-g$ ist punktweises Supremum von affinen Funktionen $\Rightarrow$ konvex $\square$

siehe nächstes Kapitel

Untere Schranke an optimalen Wert

Thm: Sei p^* der optimale Wert von $(*)$. Für jedes $\mu \geq 0, \lambda$ gilt $g(\mu,\lambda) \leq p^*$.

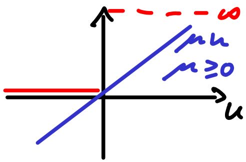
Bew: Sei x zulässig, d.h. $c_I(x) \leq 0$, $c_E(x) = 0$, und sei $\mu \geq 0$.

$$\Rightarrow g(\mu,\lambda) = \inf_{\tilde{x} \in \mathcal{D}} L(\tilde{x},\mu,\lambda) \leq L(x,\mu,\lambda) = f_0(x) + \underbrace{\mu^T c_I(x)}_{\leq 0} + \underbrace{\lambda^T c_E(x)}_{=0} \leq f_0(x).$$

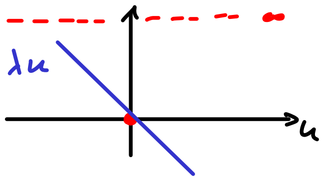
Da x beliebig war, $g(\mu,\lambda) \leq \inf_{x \text{ zulässig}} f_0(x)$. $\square$

Interpretation der dualen Funktion als „Approximation":

Definiere $\chi_-(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$



$\chi_0(u) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$



Es gilt $(*) \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \chi_-(f_i(x)) + \sum_{j=1}^{p} \chi_0(h_j(x))$

Ersetze $\chi_-(u_i) \rightsquigarrow \mu_i u_i$ mit $\mu_i \geq 0$, $\chi_0(u_i) \rightsquigarrow \lambda_i u_i$

(ersetze harte Nebenbedingungen durch weiche Bestrafung)

$$\Rightarrow p^* = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\mu,\lambda) = g(\mu,\lambda).$$

Beispiel: Minimum-Norm-Lösung und LP

Bsp: $\min_x |x|^2$ s.d. $Ax = b$

Lagrange-Funktion: $L(x,\lambda) = x^T x + \lambda^T (Ax - b)$ (konvex, quadratisch in x)

duale Funktion: $g(\lambda) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x,\lambda) = -\frac{1}{4}\lambda^T A A^T \lambda - \lambda^T b$ (konkav, quadratisch in λ)

$0 = 2x^T + \lambda^T A \iff x = -\frac{1}{2} A^T \lambda$

Eigenschaft der dualen Fkt impliziert $g(\lambda) = -\frac{1}{4}\lambda^T A A^T \lambda - \lambda^T b \le \inf_{x \in \mathcal{D}} \{x^T x \mid Ax = b\} \; \forall \lambda$

$\Rightarrow \quad b^T (AA^T)^{-1} b = g(-2(AA^T)^{-1} b) = \max_\lambda g(\lambda) \le \inf_{x \in \mathcal{D}} \{x^T x \mid Ax = b\}$

wenn AA^T invertierbar

Bsp: $\min_x c^T x$ s.d. $Ax = b$, $-x \le 0$ $(**)$

$L(x,\mu,\lambda) = c^T x - \mu^T x + \lambda^T (Ax - b) = -\lambda^T b + (c + A^T\lambda - \mu)^T x$

$$g(\mu,\lambda) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x,\mu,\lambda) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } \mu \ne c + A^T\lambda \\ -\lambda^T b & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \; -\lambda^T b$ für jedes λ mit $\mu := c + A^T \lambda \ge 0$ ist untere Schranke an $(**)$

Lagrange-Dualität: Duale Funktion

Duales Problem

Erinnerung: Jedes (μ,λ) mit $\mu \geq 0$ erfüllt $g(\mu,\lambda) \leq p^*$.

Def.: Das (Lagrange-) duale Problem zu $(*)$ lautet

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}^m,\ \lambda \in \mathbb{R}^p,\ \mu \geq 0} g(\mu,\lambda) \qquad \text{(DP)}$$

- Das ursprüngliche Optimierungsproblem $(*)$ heißt primales Problem.
- (μ,λ) heißt dual-zulässig, wenn $\mu \geq 0$ (komp.-weise) & $g(\mu,\lambda) > -\infty$
- (μ^*,λ^*) heißen dual-optimal, wenn sie (DP) lösen.

Thm: (DP) ist konvexes Optimierungsproblem. (egal wie $(*)$ aussah)

Bew: (DP) $\iff$ $\min_{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p} -g(\mu,\lambda)$ s.d. $-\mu \leq 0$

und $-g$, $\mu \mapsto -\mu_i$ sind konvex. $\square$

Beispiel: Duales Problem für LP

Das duale Problem zu einem linearen Programm ist wieder ein LP:

$$\min_x c^T x \quad \text{s.d. } Ax - b = 0,\ Bx - v \leq 0$$

$$g(\mu,\lambda) = \inf_x c^T x + \mu^T (Bx - v) + \lambda^T (Ax - b) = \begin{cases} -\infty & \text{wenn } c + B^T\mu + A^T\lambda \neq 0 \\ -\mu^T v - \lambda^T b & \text{sonst} \end{cases}$$

duales Problem: $\max\limits_{\lambda,\mu \geq 0} g(\mu,\lambda) = \max\limits_{\substack{\lambda,\mu\geq 0 \\ c + B^T\mu + A^T\lambda = 0}} -\mu^T v - \lambda^T b$

$$\Leftrightarrow \min_{(\mu,\lambda)} v^T\mu + b^T\lambda \quad \text{s.d. } -\mu \leq 0,\ A^T\lambda + B^T\mu + c = 0$$

Starke versus schwache Dualität

Sei p^* der optimale Wert des primalen Problems (*), d^* der des dualen Problems (DP).

Wir wissen $d^* \leq p^*$, insbesondere:

- Wenn (*) nach unten unbeschränkt ist ($p^* = -\infty$), dann ist (DP) nicht zulässig ($d^* = -\infty$)
- Wenn (DP) nach oben unbeschränkt ist ($d^* = \infty$), dann ist (*) nicht zulässig ($p^* = \infty$)

Def: · Die Eigenschaft $d^* \leq p^*$ heißt schwache Dualität.

· $p^* - d^* \geq 0$ heißt Dualitätslücke.

· Wenn $p^* = d^*$ gilt, sagt man, es gilt starke Dualität.

Typischerweise gilt nicht starke Dualität, allerdings gilt sie für viele konvexe (und einige nicht-konvexe) Optimierungsprobleme!

Später werden wir Kriterien herleiten, wann starke Dualität gilt.

Falls starke Dualität gilt, sind (*) und (DP) äquivalent!

Lagrange-Dualität: Starke Dualität

Beispiele

Bsp: $\min_{x \in \mathbb{R}} -x^2$ s.d. $x-1 \leq 0$, $-x-1 \leq 0$ (f₀ konkav, f₀ nach unten unbeschr.)

$L(x,\mu_1,\mu_2) = -x^2 + \mu_1(x-1) + \mu_2(-x-1)$

$g(\mu_1,\mu_2) = \inf_x L(x,\mu_1,\mu_2) = -\infty$

$\Rightarrow d^* = -\infty < -1 = p^*$ (keine starke Dualität)

Bsp: $\min_{x,y \in \mathbb{R}} e^{-x}$ s.d. $\frac{x^2}{y} \leq 0$, $5-y \leq 0$ (konvexes Problem, degenerierte NB)

$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = e^{-x} + \mu_1 \frac{x^2}{y} + \mu_2(5-y)$

$g(\mu_1,\mu_2) = \inf_{x,y} L(x,y,\mu_1,\mu_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mu_1 = \mu_2 = 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow d^* = 0 < 1 = p^*$ (keine starke Dualität)

Bsp: $\min_{x,y \in \mathbb{R}} e^{-x}$ s.d. $x^2 \leq 0$, $5-y \leq 0$

$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = e^{-x} + \mu_1 x^2 + \mu_2(5-y)$

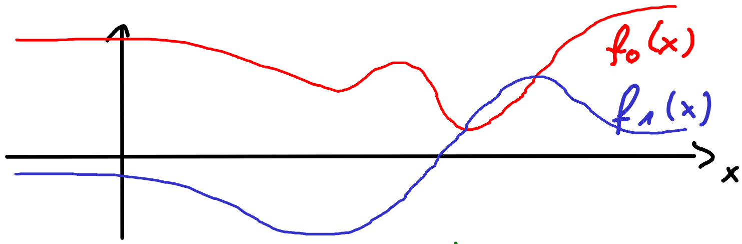
$g(\mu_1,\mu_2) = \inf_{x,y} L(x,y,\mu_1,\mu_2) = \begin{cases} -\infty & \text{wenn } \mu_2 \neq 0, \mu_1 < 0 \\ e^{-\hat{x}} + \mu_1 \hat{x}^2, \text{ wobei } e^{-\hat{x}} = 2\mu_1 \hat{x}, & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow d^* = \sup_{\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0} g(\mu_1,\mu_2) = 1 = p^*$ (starke Dualität)

Lagrange-Dualität: Starke Dualität

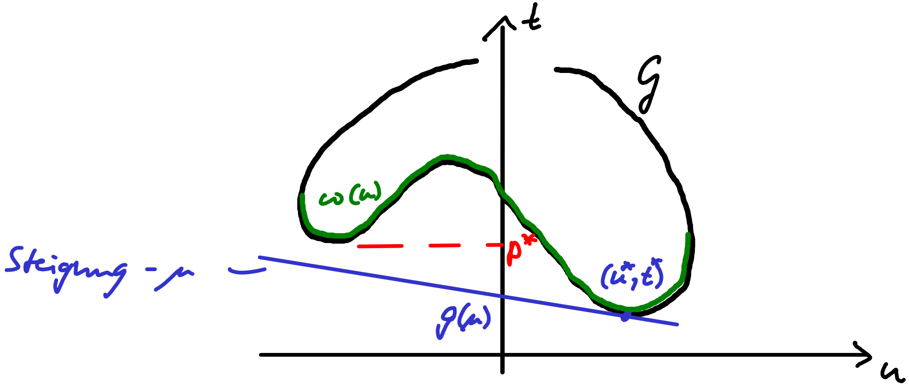
Geometrische Intuition und nichtkonvexe Probleme

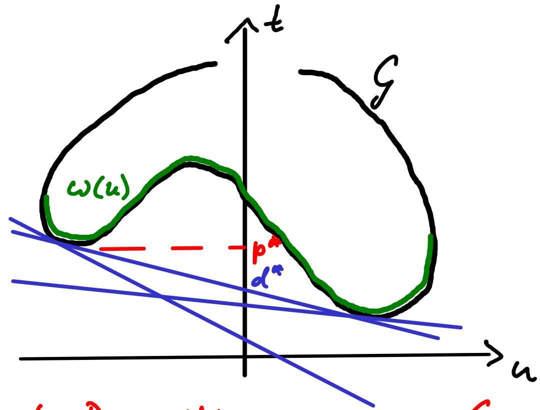
Bsp: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f_0(x)$ s.d. $f_1(x) \le 0$



primale Fkt: $\omega(u) = \inf \{ f_0(x) \mid f_1(x) = u \}$

duale Fkt: $g(\mu) = \inf\limits_x f_0(x) + \mu f_1(x) = \inf\limits_{(u,t) \in \mathcal{G}} t + \mu u$ mit $\mathcal{G} = \{ (f_1(x), f_0(x)) \mid x \in \mathbb{R} \}$





Wenn $g(\mu) = t^* + \mu u^*$, dann ist $g(\mu)$ der y-Achsen-Abschnitt der Geraden durch (u^*, t^*) mit Steigung $-\mu$

starke Dualität nur, wenn $\mathcal{G}$ auf einer Seite der hor. Tangente in $(f_1(x^*), f_0(x^*))$ liegt

Starke und schwache Dualität von Wertemengen

- Wie im vorigen Bsp., setze $\mathcal{G} = \{ (f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x), h_1(x), \dots, h_p(x)) \mid x \in \mathcal{D} \}$

  $\Rightarrow p^* = \inf \{ t \mid (t, u, v) \in \mathcal{G},\ u \leq 0,\ v = 0 \}$

- Betrachte $(1, \mu, \lambda)^T (t, u, v) = t + \mu^T u + \lambda^T v$

  $\Rightarrow g(\mu, \lambda) = \inf \{ (1, \mu, \lambda)^T (t, u, v) \mid (t, u, v) \in \mathcal{G} \}$

  Wenn Infimum endlich ist, dann definiert die Gleichung $(t, u, v) \mapsto (1, \mu, \lambda)^T (t, u, v) = g(\mu, \lambda)$ eine Hyperfläche orthogonal zu $(1, \mu, \lambda)$, die tangential an $\mathcal{G}$ ist, sodass $\mathcal{G}$ auf einer Seite davon liegt.

- $d^* = \sup\limits_{\mu \geq 0, \lambda} g(\mu, \lambda) = \sup\limits_{\mu \geq 0, \lambda} \inf \{ (1, \mu, \lambda)^T (t, u, v) \mid (t, u, v) \in \mathcal{G} \}$

  $\leq \inf \{ t \mid (t, u, v) \in \mathcal{G},\ u \leq 0,\ v = 0 \} = p^*$

  wenn $\mu \geq 0$ & $u \leq 0$, $v = 0$, dann $t \geq (1, \mu, \lambda)^T (t, u, v)$

$\Rightarrow$ schwache Dualität, und starke Dualität gilt genau dann, wenn $\mu^T u = 0$ ist im Optimum

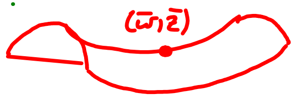
Lagrange-Dualität: Starke Dualität

Sattelpunkt-Interpretation

Def: Sei $f: W \times Z \to \mathbb{R}$. $(\bar{w}, \bar{z}) \in W \times Z$ heißt <u>Sattelpunkt</u>, wenn

$$f(\bar{w}, z) \le f(\bar{w}, \bar{z}) \le f(w, \bar{z}) \qquad \forall (w, z) \in W \times Z, \text{ d.h.}$$

$$f(\bar{w}, \bar{z}) = \inf_{w \in W} f(w, \bar{z}) = \sup_{z \in Z} f(\bar{w}, z).$$



Thm: $\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z) \le \inf_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z)$

Bew: $\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z) \le \sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} \sup_{\tilde{z} \in Z} f(w, \tilde{z}) = \inf_{w \in W} \sup_{\hat{z} \in Z} f(w, \hat{z})$ $\square$

Def: f besitzt die <u>Sattelpunkteigenschaft</u>, wenn $\sup_{z} \inf_{w} f(w, z) = \inf_{w} \sup_{z} f(w, z)$.

Thm: Starke Dualität $\iff$ L erfüllt die Sattelpunkteigenschaft auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p$.

Bew: $p^* = \inf_{x,\, c_I(x) \le 0,\, c_E(x) = 0} f_0(x) = \inf_{x} \sup_{\mu \ge 0, \lambda} L(x, \mu, \lambda)$

$d^* = \sup_{\mu \ge 0, \lambda} g(\mu, \lambda) = \sup_{\mu \ge 0, \lambda} \inf_{x} L(x, \mu, \lambda)$ $\square$

$\Rightarrow$ Optimum ist Sattelpunkt von L!

Lagrange-Dualität: Optimalitätsbedingungen

Zertifikate

Beachte: Wenn x zulässig und (μ,λ) dual-zulässig sind, dann

$$f_0(x) - p^* \leq f_0(x) - g(\mu,\lambda) =: \varepsilon \text{, d.h.}$$

x ist ε-suboptimal.

Insbesondere, wenn $f_0(x) = g(\mu,\lambda)$, dann ist x optimal.

Im Allgemeinen gilt $p^*, d^* \in [g(\mu,\lambda), f_0(x)]$ (denn $f_0(x) \geq p^* \geq d^* \geq g(\mu,\lambda)$)

Def: (μ,λ) nennt man ein (duales) Zertifikat dafür, dass x ε-suboptimal/optimal ist.

Dies kann als Abbruchkriterium für Optimierungsalgorithmen benutzt werden!

Komplementarität

Angenommen, es gilt starke Dualität. Sei x^* primal-optimal, (μ^*, λ^*) dual-optimal.

$$f_0(x^*) = p^* = d^* = g(\mu^*, \lambda^*) = \inf_x \; f_0(x) + \mu^{*T} c_I(x) + \lambda^{*T} c_E(x)$$

$$\overset{(A)}{\leq} f_0(x^*) + \mu^{*T} c_I(x^*) + \lambda^{*T} c_E(x^*) \overset{(B)}{\leq} f_0(x^*),$$

$\mu^* \geq 0, \; c_I(x^*) \leq 0, \; c_E(x^*) = 0$

Somit gilt Gleichheit in (A) und (B).

Gleichheit in (A) $\Longrightarrow$ $x \mapsto L(x, \mu^*, \lambda^*)$ wird minimiert durch x^*

Gleichheit in (B) $\Longrightarrow$ $(\mu, \lambda) \mapsto L(x^*, \mu, \lambda)$ wird maximiert durch (μ^*, λ^*)

(Sattelpunktseigenschaft)

$\Longrightarrow$ $\mu^{*T} c_I(x^*) = 0$ $\Longrightarrow$ $\mu_i^* f_i(x^*) = 0, \; i = 1, \ldots, m.$

$\mu_i^* f_i(x^*) \leq 0$

$\Longrightarrow$ $\mu_i^* = 0$ oder $f_i(x^*) = 0$ (Komplementaritätsbedingung)

KKT-Bedingungen aus starker Dualität

Thm: Betrachte $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x)$ s.d. $c_E(x) = 0$, $c_I(x) \leq 0$ mit f_0, c_E, c_I differenzierbar (d.h. $\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i(x) \cap \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{dom} h_i(x)$ ist offen).

Wenn starke Dualität gilt und x^* primal-, (μ^*, λ^*) dual-optimal sind, dann

zuvor: x^* ist regulär

$$\left.\begin{aligned} &c_I(x^*) \leq 0, \quad c_E(x^*) = 0, \quad \mu^* \geq 0, \quad \mu^{*T} c_I(x^*) = 0 \\ &Df_0(x^*) + \mu^{*T} Dc_I(x^*) + \lambda^{*T} Dc_E(x^*) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (KKT)$$

Bew: · Sattelpunktseigenschaft von $L \Rightarrow x^*$ minimiert $x \mapsto L(x, \mu^*, \lambda^*)$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x} L(x, \mu^*, \lambda^*) = Df_0(x^*) + \mu^{*T} Dc_I(x^*) + \lambda^{*T} Dc_E(x^*)$$

· Komplementaritätsbed. $\Rightarrow \mu^{*T} c_I(x^*) = 0$ $\square$

Thm: Seien $f_0, f_1, \ldots, f_m$ konvex, $h_1, \ldots, h_p$ affin. Dann

(KKT) $\Rightarrow$ starke Dualität, x^* ist primal-, (μ^*, λ^*) dual-optimal.

Bew: (KKT) implizieren Zulässigkeit von x^*, (μ^*, λ^*). Wegen $\mu^* \geq 0$ ist

$$x \mapsto \underbrace{f_0(x) + \mu^{*T} c_I(x) + \lambda^{*T} c_E(x)}_{L(x, \mu^*, \lambda^*)} \text{ konvex} \overset{(KKT)}{\Rightarrow} x^* \text{ minimiert } x \mapsto L(x, \mu^*, \lambda^*)$$

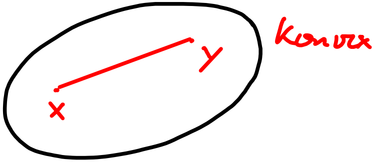
$$\Rightarrow g(\mu^*, \lambda^*) = L(x^*, \mu^*, \lambda^*) = f_0(x^*) \quad \square$$

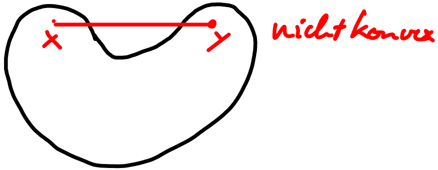
Motivation

- Viele praktische Optimierungsprobleme sind konvex
  - → Bildverarbeitung / Inverse Probleme (L^1-artige Optimierung)
  - → Produktionsplanung: linearisierte Nebenbedingungen ⇒ LP
- Manchmal lässt sich die konvexe Relaxation (konvexe Hülle) eines nichtkonvexen Optimierungsproblems finden
- Konvexe Optimierungsprobleme sind einfacher zu lösen (an jedem Punkt ist klar, wohin man als nächstes gehen sollte)
- Konvexe Optimierungsprobleme erfüllen viele schöne Eigenschaften
  - → lokales Optimum = globales Optimum
  - → oft gilt starke Dualität
- Konvexe Optimierungsprobleme tauchen natürlicherweise auf, z.B. als duales Problem

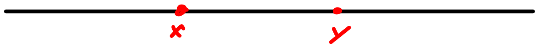
Definition & Beispiele konvexer Mengen

<u>Def</u>: Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>konvex</u>, wenn für alle $x, y \in C$ das Liniensegment dazwischen auch in C liegt, d.h. $\theta x + (1-\theta) y \in C \quad \forall x, y \in C,\ \theta \in [0,1]$





<u>Bsp</u>: · <u>Gerade</u>: gegeben $x, y \in \mathbb{R}^n$, $L = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \theta \in \mathbb{R} : z = \theta x + (1-\theta) y \}$ ist konvex



· <u>Affine Mengen</u>: C heißt affin, wenn für alle $x, y \in C$ auch auch die Gerade durch x und y in C liegt. Wenn C affin ist und $x_0 \in C$, dann ist $V = \{ z \mid z + x_0 \in C \}$ ein linearer Untervektorraum.

→ z.B. die Lösungsmenge einer linearen Gleichung, $C = \{ x \mid Ax = b \}$, $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$

→ <u>affine Hülle</u> von $C \subset \mathbb{R}^n$: $\operatorname{aff}(C) = \{ y = \overset{\in \mathbb{R}}{\theta_1} x_1 + \dots + \overset{\in \mathbb{R}}{\theta_k} x_k \mid k \in \mathbb{N},\ \theta_1 + \dots + \theta_k = 1,\ x_1, \dots, x_k \in C \}$

ist die kleinste affine Menge, die C enthält. (HA)

→ <u>affine Dimension</u> von C $=$ $\dim(\operatorname{aff}(C))$ (beachte: für S^1 ist dies 2!)

Beispiele II

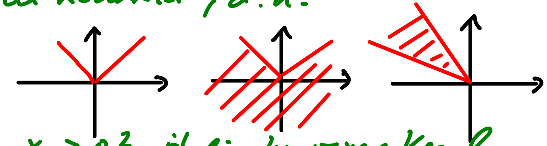
Bsp.:

- Hyperebene: $H = \{x \mid a^T x = b\}$ für $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ ist affin mit $\operatorname{codim} H = 1$
- Halbraum: $H = \{x \mid a^T x \le b\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ ist konvex

- Kegel: C heißt Kegel, wenn für alle $x \in C$ und alle $\theta \ge 0$ auch $\theta x \in C$.

  C heißt konvexer Kegel, wenn es zusätzlich konvex ist, d.h.

  $\forall x, y \in C,\ \theta_1, \theta_2 \ge 0: \quad \theta_1 x + \theta_2 y \in C$



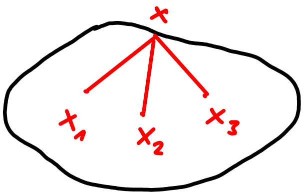
  Der positive Orthant $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \ge 0\}$ ist ein konvexer Kegel.

- (Norm-)Bälle: Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ (siehe auch etwas später).

  Der Normball $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$ ist konvex.

- m-Ellipse: Sei $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Die m-Ellipse

  $\{x \mid |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_m| \le 1\}$ ist konvex.



Konvexkombinationen

Def: Seien $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $\theta_1, \dots, \theta_k \geq 0$ mit $\theta_1 + \dots + \theta_k = 1$. $y = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i$ heißt <u>Konvexkombination</u> der x_i.

Thm: $C \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex $\Longleftrightarrow$ alle Konvexkombinationen jeglicher $x_1, \dots, x_k \in C$ liegen in C

Bew: „$\Leftarrow$" Das Liniensegment zwischen $x, y \in C$ ist genau alle Konvexkombinationen von x, y.

„$\Rightarrow$" Induktion in k: $k=2$ ist die Definition von Konvexität

Induktionsschritt: Betrachte $x_1, \dots, x_{k+1} \in C$, $\theta_1, \dots, \theta_{k+1} \geq 0$, $\theta_1 + \dots + \theta_{k+1} = 1$.

OBdA sei $z = \sum_{i=1}^{k} \theta_i > 0$ und setze $\theta_i' = \theta_i / z$, dann gilt $\sum_{i=1}^{k} \theta_i' = 1$.

$\Longrightarrow y' = \sum_{i=1}^{k} \theta_i' x_i \in C$.

Außerdem gilt $z + \theta_{k+1} = 1$, d.h. $\sum_{i=1}^{k+1} \theta_i x_i = z y' + \theta_{k+1} x_{k+1} \in C$,

weil dies eine Konvexkombination zweier Punkte aus C ist. $\square$

Kurzgesagt: Konvexkombinationen von Konvexkombinationen sind wieder Konvexkombinationen.

Konvexe Hülle

Thm: Sei $\{C_i\}_{i\in J}$ eine Familie konvexer Mengen, dann ist $\bigcap_{i\in J} C_i$ konvex.

Bew.: Sei $x,y \in \bigcap_{i\in J} C_i$, dann haben wir für alle $i\in J$, dass $x,y\in C_i$, somit $\theta x+(1-\theta)y\in C_i \ \forall \theta\in[0,1]$

$\Rightarrow \forall \theta\in[0,1]: \ \theta x+(1-\theta)y \in \bigcap_{i\in J} C_i$ $\square$

Def: Die konvexe Hülle $\operatorname{conv} C$ einer Menge $C\subset\mathbb{R}^n$ ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die C enthalten.

Thm: $\operatorname{conv} C = \{y=\sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid k\in\mathbb{N}, x_1,\dots,x_k\in C, \theta_1,\dots,\theta_k\geq 0, \theta_1+\dots+\theta_k=1\} =: T$

Bew: „$\subset$": T ist konvex: jegliche $x,y\in T$ sind Konvexkombinationen von Punkten in C, somit ist auch jede Konvexkombination von x,y eine Konv.-komb. von Punkten in C

$\Rightarrow$ diese liegt in T.

Außerdem gilt $C\subset T$, somit $\operatorname{conv} C\subset T$.

„$\supset$": Sei S konvex mit $C\subset S$.

Wegen der vorigen Folie enthält S alle seine Konvexkomb., somit auch alle Konvexkomb. von Punkten aus C. $\Rightarrow S\supset T \underset{S \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \operatorname{conv} C\supset T$. $\square$

Caratheodorys Theorem

Thm (Caratheodory): Jedes $x \in \operatorname{conv} C$, $C \subset \mathbb{R}^n$, kann geschrieben werden als Konvexkombination von $n+1$ Elementen aus C.

Bew: Betrachte eine beliebige KonvexkomB. $x = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i$ für $k > n+1$.

Behauptung: Ohne x zu verändern, können wir die θ_i so abändern, dass ein θ_i 0 wird.

In der Tat: $\{x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1\} \subset \mathbb{R}^n$ ist linear abhängig, da $k-1 > n$.

$\Rightarrow$ Es gibt $(\beta_2, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{k-1} \setminus \{0\}$ mit $0 = \sum_{i=2}^{k} \beta_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^{k} \beta_i x_i - \underbrace{\left(\sum_{i=2}^{k} \beta_i\right)}_{=:-\beta_1} x_1$.

Definiere $\theta_i' = \theta_i - t^* \beta_i$ für $t^* = \theta_{i^*} / \beta_{i^*}$, $i^* = \operatorname{argmin}_{i=1,\dots,k} \theta_i / |\beta_i|$

$\Rightarrow$ $\theta_i' \geq 0$ und $\theta_{i^*}' = 0$.

Außerdem gilt $\sum_{i=1}^{k} \theta_i' = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \theta_i}_{=1} - t^* \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \beta_i}_{=0} = 1$

und $\sum_{i=1}^{k} \theta_i' x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i}_{=x} - t^* \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i}_{= \sum_{i=2}^{k} \beta_i (x_i - x_1) = 0} = x$ $\square$

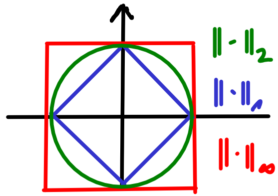
$\rightsquigarrow$ eine ähnliche Technik benutzt die Simplex-Methode!

Beispiele III: Normbälle

Def: Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ heißt Norm, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$

(a) $\|x\| \geq 0$ (b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (d) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bsp:
- Euklidische Norm $\|x\|_2 = |x| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- ℓ_1-Norm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ „Manhattan-Norm"
- ℓ_∞-Norm $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$



Def:
- Der Normball $B(r,x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \leq r \}$ ist konvex.
- Der Ellipsoid $B_P(r,x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid (y-x)^T P (y-x) \leq r^2 \}$, P pos. def., ist konvex,

  $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$ definiert eine Norm
- Der Normkegel $C = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\| \leq t \}$ ist ein konvexer Kegel.

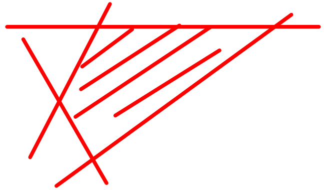
  „2^{nd} order cone" für $\|\cdot\|_2$

Beispiele IV: Simplices

<u>Def</u>.: Der <u>Polyeder</u> $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x \leq b_j,\ j=1,\dots,m,\ c_j^T x = d_j,\ j=1,\dots,p\},\ a_j, c_j \in \mathbb{R}^n, b_j, d_j \in \mathbb{R}$

ist der Schnitt aus m Halbräumen und p Hyperebenen und ist somit konvex.

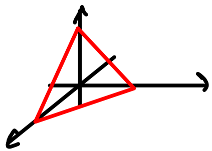
Kompakte Notation: $P = \{x \mid Ax \leq b,\ Cx = d\}$



- Ein <u>Polytop</u> ist ein beschränkter Polyeder.
- $k+1$ Punkte $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ heißen <u>affin unabhängig</u>,

  wenn $x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0$ linear unabhängig sind.
- Ein <u>Simplex</u> C ist die konvexe Hülle von $k+1$ affin unabhängigen Punkten,

  $C = \operatorname{conv}\{x_0, \dots, x_k\}$.
- Der <u>Wahrscheinlichkeitssimplex</u> ist $\operatorname{conv}\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$



<u>Thm</u>: Jeder Simplex ist ein Polytop.

Topologische Begriffe

Def: · Die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\mathrm{conv}}\, S$ einer Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ ist der Schnitt aus allen abgeschlossenen konvexen Mengen, die S enthalten.

· Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex & nichtleer. Wenn das Innere von C nichtleer ist, $\operatorname{aff} C = \mathbb{R}^n$

Das relative Innere von $C \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{relint} C$, ist das Innere von C bzgl. der Topologie von $\operatorname{aff} C$

$$x \in \operatorname{relint} C \iff x \in \operatorname{aff} C \;\&\; \exists \delta > 0 : \operatorname{aff} C \cap B(x,\delta) \subset C$$

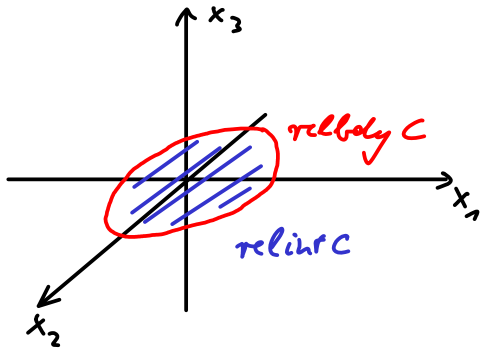
· Der relative Rand von C, $\operatorname{relbdy} C$, wird analog definiert.

Bsp: $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0,\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

$\operatorname{aff} C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$

$\operatorname{relint} C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0,\; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

$\operatorname{relbdy} C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0,\; x_1^2 + x_2^2 = 1\}$



Konvexitätserhaltende Operationen

Thm: Der Durchschnitt konvexer Mengen ist konvex (siehe frühere Folien)

Thm: Das kartesische Produkt $C = C_1 \times \ldots \times C_k$ konvexer Mengen $C_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ist konvex.

Bew: HA

Thm: Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ affin, d.h. $A(x) = Bx + c$ für $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^m$. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$ konvex. Dann sind auch $A(C)$ und $A^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \in D\}$ konvex.

Bew:
- Seien $x, y \in C$. Das Bild von $[x,y] = \{\theta x + (1-\theta) y \mid \theta \in [0,1]\}$ ist $[A(x), A(y)] \Rightarrow A(C)$ konvex.
- Seien $x, y \in A^{-1}(D)$, dann $A([x,y]) = [A(x), A(y)] \subset D$. $\Rightarrow [x,y] \subset A^{-1}(D) \Rightarrow A^{-1}(D)$ ist konvex. $\square$

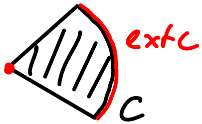
Thm: $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex $\Rightarrow$ $\operatorname{int} C$, $\operatorname{relint} C$, $\overline{C}$ sind konvex.

Bew: HA

Extremalpunkte

<u>Def</u>: · Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $C \neq \emptyset$. $x \in C$ heißt <u>Extremalpunkt</u> von C, wenn es keine Punkte $x_1, x_2 \in C$ gibt mit $x_1 \neq x_2$ und $x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2$ für ein $\theta \in (0,1)$.

· Menge der Extremalpunkte von C = $\operatorname{ext} C$



<u>Kor</u>: · In obiger Definition darf man sich auf $\theta = \frac{1}{2}$ (arithmetische Durchschnitt) beschränken.

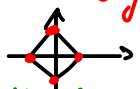
· $x \in \operatorname{ext} C \iff C \setminus \{x\}$ konvex

<u>Bsp</u>: · $C = B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\} \Rightarrow$ alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$ sind Extremalpunkte:

Sei $x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2$, $\theta = \frac{1}{2}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in C$.

$$1 = |x|^2 = |\theta x_1 + (1-\theta) x_2|^2 = 2 \underbrace{\left(\theta^2 |x_1|^2 + (1-\theta)^2 |x_2|^2\right)}_{\leq\, \theta^2 + (1-\theta)^2 = \frac{1}{2}} - \underbrace{|\theta x_1 - (1-\theta) x_2|^2}_{=0 \text{ genau dann, wenn } x_1 = \frac{1-\theta}{\theta} x_2 = x_2} < 1.$$

· Der ℓ_1-Ball hat endlich viele Extremalpunkte.



· $\operatorname{ext} C = \{0\}$ für einen konvexen Kegel C, der kein Halbraum & keine affine Menge

· $\operatorname{ext} C = \emptyset$ für affine Mengen oder Halbräume.

Eigenschaften von Extremalpunkten

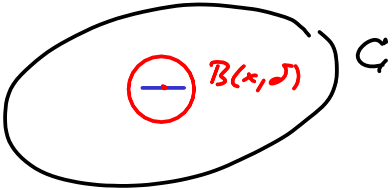
Thm: Wenn $C \neq \emptyset$ kompakt und konvex, dann $\operatorname{ext} C \neq \emptyset$.

Bew: Wegen Kompaktheit nimmt $x \mapsto |x|^2$ ihr Maximum auf C in einem $\bar{x} \in C$ an.

Beh: $\bar{x} \in \operatorname{ext} C$. Tatsächlich, sei $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ für $x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$, dann

$$|\bar{x}|^2 = \left|\frac{x_1+x_2}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) - \left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|^2 < |\bar{x}|^2 \quad ↯ \qquad \square$$

Thm: $\operatorname{ext} C \subset \operatorname{relbdy} C$



Thm (Minkowski): Wenn $C \neq \emptyset$ kompakt & konvex, dann $C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C)$.

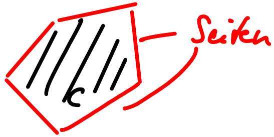
Bew: Später

Kor (siehe Satz von Caratheodory): Wenn zusätzlich $\operatorname{aff\,dim} C = k$, dann ist jeder Punkt in C die Konvexkombination von höchstens $k+1$ Extremalpunkten.

Seiten

Def.: Eine nichtleere konvexe Teilmenge $F \subset C$ heißt Seite von C, wenn für alle $x_1, x_2 \in C$ gilt: $\operatorname{relint}[x_1, x_2] \cap F \neq \emptyset \Rightarrow [x_1, x_2] \subset F$

Bsp:
- $x \in \operatorname{ext} C \iff \{x\}$ ist eine (0-dimensionale) Seite von C
- 1-dimensionale Seiten = Kanten
- Seitenflächen von Polyedern
- C selbst ist Seite von C für konvexe abgeschlossene Mengen C



Thm: Sei F eine Seite der konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$. $\operatorname{ext}(F) \subset \operatorname{ext}(C)$

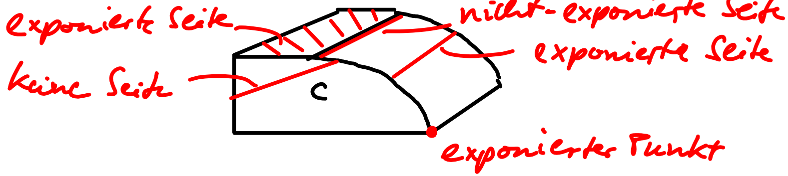
Bew: Annahme: $x \in \operatorname{ext} F \setminus \operatorname{ext} C$, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in C$, $x_1 \neq x_2$, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Nach Definition einer Seite gilt somit $[x_1, x_2] \subset F$, somit $x_1, x_2 \in F \Rightarrow x \notin \operatorname{ext} F$ ↯ □

Exponierte Seiten

<u>Def</u>: - Eine Hyperebene $H_{s,r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s^T x = r\}$ <u>trägt</u> $C \subset \mathbb{R}^n$, wenn C vollständig in einem der beiden Halbräume $\{x \in \mathbb{R}^n \mid s^T x \leq r\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^n \mid s^T x \geq r\}$ liegt.

- $H_{s,r}$ <u>trägt C in $x \in C$</u>, wenn zusätzlich $x \in H_{s,r}$
- $F \subset C \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>exponierte Seite</u>, wenn es eine tragende Hyperebene H gibt mit $F = H \cap C$.
- <u>Exponierter Punkt</u> = 0-dimensionale exponierte Seite (<u>Ecke</u>)



<u>Thm</u>: Eine exponierte Seite einer konvexen Menge ist eine Seite.

<u>Bew</u>: Sei $F = C \cap H_{s,r}$ für eine tragende Hyperebene $H_{s,r}$ (oBdA, $C \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid s^T x \leq r\}$).

Seien $x, x_1, x_2 \in C$, $\theta \in (0,1)$ mit $x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in F \subset H_{s,r}$.

$\Rightarrow r = s^T(\theta x_1 + (1-\theta) x_2)$. OBdA sei $x_1 \notin F \subset H_{s,r}$, d.h. $s^T x_1 < r$.

$\Rightarrow s^T(\theta x_1 + (1-\theta) x_2) < r$ $\lightning$ $\Rightarrow x_1, x_2 \in F \Rightarrow [x_1, x_2] \subset F$. $\square$

<u>Kor</u>: Für $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, F eine exponierte Seite, gilt $\operatorname{ext} F \subset \operatorname{ext} C$ (siehe vorige Folie).

Projektionen

Def: · Eine lineare Abbildung $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Projektion, wenn $P^2 = P$ (Idempotenz).

· Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum. $P_V: \mathbb{R}^n \to V$, $x \mapsto v$ mit $x = v + v^\perp \in V \oplus V^\perp$ heißt die orthogonale Projektion auf V.

Thm: P_V ist linear, idempotent, symmetrisch, positiv semidefinit, nichtexpansiv ($\|P_V\|_2 \leq 1$), $x = P_V(x) + P_{V^\perp}(x)$.

Wie kann man die orthogonale Projektion auf abgeschlossene Mengen verallgemeinern?

Thm: $P_V(x) = \underset{y \in V}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2}\|y - x\|_2^2$.

Bew: Sei $x = v + v^\perp \in V \oplus V^\perp$, dann $\frac{1}{2}\|y - x\|_2^2 = \frac{1}{2}\|y - v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v^\perp\|_2^2 \Rightarrow y = v$ ist Minimierer. $\square$

Thm: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $x \in \mathbb{R}^n$, dann nimmt $y \mapsto f_x(y) = \frac{1}{2}\|y - x\|_2^2$ auf C ihr Minimum an.

Bew: Sei $c \in C$ und $S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid f_x(y) \leq f_x(c)\}$. f_x ist stetig, $C \cap S$ ist kompakt

$\Rightarrow$ mit dem Satz von Weierstraß nimmt f_x ein Minimum auf $C \cap S$ und somit auf C an. $\square$

Orthogonale Projektionen

<u>Def</u>: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Die (nichtlineare) Abbildung $P_C : \mathbb{R}^n \to C$,

$$P_C(x) = \operatorname*{argmin}_{y\in C} \underbrace{\tfrac12 \|x-y\|_2^2}_{f_x(y)},$$

heißt <u>orthogonale Projektion auf C</u>.

<u>Thm</u>: P_C ist wohldefiniert.

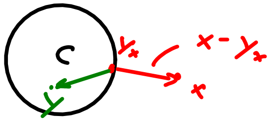
Bew: Eindeutigkeit ist noch zu zeigen: Seien $y_1 \neq y_2$ Minimierer, $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} \in C$.

$$f_x(y_0) - \frac12\big(f_x(y_1)+f_x(y_2)\big) = \frac{\|x\|_2^2 - x\cdot y_1 - x\cdot y_2 + \|y_0\|_2^2}{2} - \frac{\|x\|_2^2 - 2x\cdot y_1 + \|y_1\|_2^2 + \|x\|_2^2 - 2x\cdot y_2 + \|y_2\|_2^2}{4}$$

$$= \frac18\left(-\|y_1\|_2^2 - \|y_2\|_2^2 + 2y_1\cdot y_2\right) = -\frac18\|y_1-y_2\|_2^2 < 0 \quad ↯ \qquad \square$$

<u>Thm</u>: $P_C \circ P_C = P_C$ & P_C linear $\iff$ C ist Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

<u>Thm</u>: $y_x = P_C(x) \iff y_x\in C$ & $(x-y_x)\cdot(y-y_x) \le 0 \ \ \forall y \in C$.



Bew: „$\Rightarrow$": Für $y\in C$, $\alpha\in[0,1]$ beliebig, betrachte $y_\alpha = y_x + \alpha(y-y_x) \in C$.

Es gilt $\frac12\|y_x - x\|_2^2 = f_x(y_x) \le f_x(y_\alpha) = \frac12\|y_x - x + \alpha(y-y_x)\|_2^2$

$\Rightarrow$ $0 \le \alpha(y_x - x)\cdot(y-y_x) + \alpha^2\|y-y_x\|_2^2$; nun dividiere durch α und lasse $\alpha\to 0$.

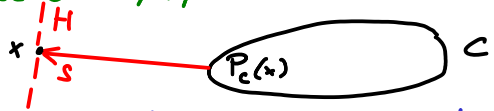
„$\Leftarrow$": $\forall y\in C$: $0 \ge (x-y_x)\cdot(y-y_x) = \|x-y_x\|_2^2 + (x-y_x)\cdot(y-x) \ge \|x-y_x\|_2^2 - \|x-y_x\|_2\,\|y-x\|_2$

$\Rightarrow$ entweder $y_x = x$ oder $\|x-y_x\|_2 \le \|y-x\|_2$ $\qquad\square$

Trennung konvexer Mengen

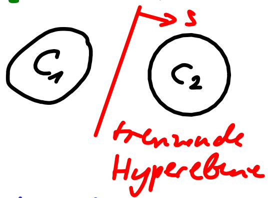
Thm: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen, $x \notin C$. Dann existiert $s \in \mathbb{R}^n$ sodass $s\cdot x > \sup_{y\in C} s\cdot y$.

Bew: Setzen $s := x - P_C(x)$.



Für alle $y \in C$ gilt $0 \geq (x - P_C(x))\cdot(y - P_C(x)) = s\cdot(y - x + s) = s\cdot y - s\cdot x + \|s\|^2 \Rightarrow s\cdot x > s\cdot y + \frac{\|s\|^2}{2}$ □

Kor: Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ konvex, abgeschlossen, nichtleer, disjunkt. Wenn C_2 beschränkt ist, existiert $s \in \mathbb{R}^n$ sodass $\sup_{y\in C_1} s\cdot y < \min_{y \in C_2} s\cdot y$.



Bew:
- $C_1 - C_2 = \{y_1 - y_2 \mid y_1 \in C_1, y_2 \in C_2\}$ ist konvex:

  $C_1 \times C_2$ ist konvex und $C_1 - C_2 = i(C_1 \times C_2)$ für die lineare Abb. $i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(a,b) \mapsto a - b$.

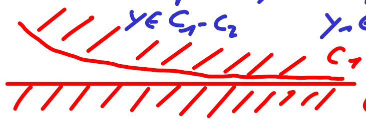
- $C_1 - C_2$ ist abgeschlossen, denn C_1 ist abgeschlossen und C_2 kompakt:

  Sei $y_k = y_k^1 - y_k^2 \in C_1 - C_2$ mit $y_k \to y$. C_2 kompakt $\Rightarrow$ $y_k^2 \to y_2 \in C_2$ für Teilfolge (Bolzano-Weierstraß)

  $\Rightarrow y_k^1 = y_k + y_k^2 \to y + y_2 \in C_1$ (da C_1 abgeschlossen) $\Rightarrow y \in C_1 - C_2$

- Vorheriges Theorem für $x = 0$, $C = C_1 - C_2 \Rightarrow \exists\, s \in \mathbb{R}^n$: $0 = s\cdot x > \sup_{y \in C_1 - C_2} s\cdot y = \sup_{y_1\in C_1} s\cdot y_1 - \min_{y_2 \in C_2} s\cdot y_2$ □

Beachte:
- Aussage kann falsch sein für C_2 unbeschränkt:



- Wenn C_1, C_2 nur konvex, nichtleer, disjunkt, erhält man noch $\sup_{C_1} s\cdot y \leq \inf_{C_2} s\cdot y$ (HA)

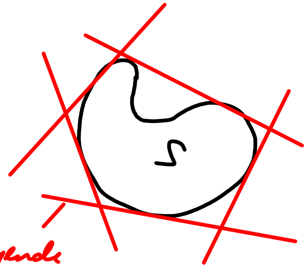
Konsequ. der Trennungseigenschaft: Tragende Hyperebenen

Thm: (Existenz tragender Hyperebene) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $x \in \partial C \cap C$. Dann existiert eine in x tragende Hyperebene zu C.

Bew: Betrachte eine Folge $x_k \notin \overline{C}$ mit $x_k \to x$. Für jedes x_k gibt es $s_k \in \mathbb{R}^n$ mit $s_k \cdot (x_k - y) > 0 \ \forall y \in C$.

OBdA sei $\|s_k\| = 1 \implies$ für eine Teilfolge gilt $s_k \to s \in S^{n-1}$.

Wegen Stetigkeit gilt $s \cdot (x - y) \geq 0 \ \forall y \in S$. $\implies H_{s,r} = \{ y \mid s \cdot y = r \}$ mit $r = s \cdot x$ ist gesuchte Hyperebene $\square$



tragende Hyperebene

Thm: Für $S \subset \mathbb{R}^n$ und Halbräume $H^-_{s,r} = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid s \cdot y \leq r \}$ setze

$$\Sigma_S = \{ (s,r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid S \subset H^-_{s,r} \} \quad \text{und} \quad C_S = \bigcap_{(s,r) \in \Sigma_S} H^-_{s,r}.$$

Dann gilt entweder $C_S = \overline{\operatorname{conv}} S$ oder $\overline{\operatorname{conv}} S = \mathbb{R}^n$.

Bew:
- Angenommen $\overline{\operatorname{conv}} S \neq \mathbb{R}^n$, dann $C_S \supset \overline{\operatorname{conv}} S$.
- Nun sei $x \notin \overline{\operatorname{conv}} S$. Trenne $\{x\}$ und $\overline{\operatorname{conv}} S$ durch eine Hyperebene H_{s_0,r_0}, d.h.

$$s_0 \cdot x > \sup_{y \in S} s_0 \cdot y = r_0 \implies (s_0, r_0) \in \Sigma_S, \text{ aber } x \notin H^-_{s_0,r_0} \implies x \notin C_S. \quad \square$$

Konsequ. der Trennungseigenschaft: Halbräume & Extr.-Punkte

Kor: Sei $C \subsetneq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex, dann gilt $C = C_C$, d.h. C ist Schnitt von Halbräumen.

Spezialfall: Ein Polyeder ist Schnitt aus endlich vielen Halbräumen.

Thm: (Minkowski) Wenn $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, konvex & nichtleer ist, dann gilt $C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C)$.

Bew: Induktion in $k = \operatorname{affdim} C$; Fall $k=0$ ist trivial. Induktionsschritt $k-1 \to k$:

Sei $x \in C$. · Fall $x \in \operatorname{relbdy} C$: Es gibt eine Hyperebene $H \not\supset C$, die C in x trägt.

warum?

$\Rightarrow$ $\operatorname{affdim} C \cap H \leq k-1$

$\Rightarrow$ x ist Konvexkombination von Extremalpunkten x_i in $C \cap H$

x_i sind auch Extremalpunkte von C, da $C \cap H$ eine exponierte Seite ist.

· Fall $x \in \operatorname{relint} C$: Wähle $x' \neq x$, $x' \in C$

$\Rightarrow$ Gerade durch x & x' schneidet $\operatorname{relbdy} C$ in zwei Punkten y, z.

$\Rightarrow$ nach dem ersten Fall gilt $y, z \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C)$

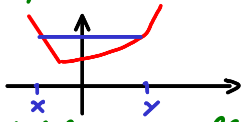
$\Rightarrow$ $x \in \operatorname{conv}(\operatorname{ext} C)$ $\square$

Konvexe Analysis: Konvexe Funktionen

Grundbegriffe

<u>Def</u>: · Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex. $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt <u>konvex</u> ($f \in \operatorname{Conv} C$), wenn $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ &

$\forall\, x, y \in C,\ \theta \in (0,1): f(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$.



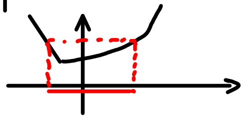
· f heißt <u>strikt konvex</u>, wenn $\forall\, x, y \in C$ mit $x \neq y$, $\theta \in (0,1): f(\theta x + (1-\theta) y) < \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$.

· f heißt <u>konkav</u>, wenn $-f$ konvex ist.

· Der <u>Graph</u> von f ist die Menge $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \operatorname{dom} f\}$.

· Der <u>Epigraph</u> von f ist $\operatorname{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \leq r\}$.

· Die <u>Subniveau-Menge</u> von f bzgl. $r \in \mathbb{R}$ ist $S_r(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r\}$.



<u>Thm</u>: · f konvex $\Rightarrow$ $\operatorname{dom} f$ konvex

· f konvex $\Leftrightarrow$ $\operatorname{epi}(f)$ konvex

· $(x, r) \in \operatorname{epi}(f) \Leftrightarrow x \in S_r(f)$

Beispiele & Eigenschaften

Bsp: - Charakteristische Funktion / Indikatorfunktion einer konvexen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in C \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

anders als $\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist konvex: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \theta \in (0,1)$: $\|\theta x + (1-\theta) y\| \leq \|\theta x\| + \|(1-\theta) y\| = \theta \|x\| + (1-\theta)\|y\|$
- Die Maximumfunktion $f(x) = \max_i x_i$ ist konvex.
- Lineare & affine Funktionen sind konvex; ihr Epigraph ist ein Halbraum.

Thm: (Jensensche Ungleichung) $\forall f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_k \in \operatorname{dom} f$, $\theta_1, \dots, \theta_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \theta_i f(x_i)$$

Bew: $(x_i, f(x_i)) \in \operatorname{epi} f \xRightarrow[\text{epi } f \text{ konvex}]{} \sum_{i=1}^k \theta_i (x_i, f(x_i)) = \left(\sum_{i=1}^k \theta_i x_i, \sum_{i=1}^k \theta_i f(x_i)\right) \in \operatorname{epi} f$ $\square$

Bem: Die Jensensche Ungleichung gilt auch für Integrale: Sei $f \in \operatorname{Conv} \Omega$ und (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitraum, dann gilt

$$f\Big(\underbrace{\int_\Omega x \, dP}_{\text{Erwartungswert der Zufallsvariable } x}\Big) \leq \underbrace{\int_\Omega f(x) \, dP}_{\text{Erw.-wert von } f}.$$

Konvexität und Stetigkeit

warum?

Thm: Sei $f \in \mathrm{Conv}\,\mathbb{R}^n$. f ist stetig auf $\mathrm{int}(\mathrm{dom}\, f)$.

Bew: · Sei $\bar{x} \in \mathrm{int}\,\mathrm{dom}\, f$. f ist beschränkt in einer Umgebung von $\bar{x}$:

Es gibt einen Simplex $Q = \mathrm{conv}\{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathrm{dom}\, f$ mit $\bar{x} \in \mathrm{int}\, Q$.

Sei $x \in Q$, d.h. $x = \sum_{i=0}^n \theta_i x_i$, $\theta_i \in [0,1]$, $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$, dann gilt $f(x) \le \sum_{i=0}^n \theta_i f(x_i) \le \max_i f(x_i) =: \tilde{M}$.

Weiter setze für $\alpha = \frac{\mathrm{dist}(\bar{x}, \partial Q)}{2\,\mathrm{diam}\, Q} \in (0, \frac{1}{4})$ $\hat{x} = \bar{x} - \frac{\alpha}{1-\alpha}(x - \bar{x}) \in Q$ (also $\bar{x} = \alpha x + (1-\alpha)\hat{x}$)

$\Rightarrow f(\bar{x}) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(\hat{x}) \Rightarrow f(x) \ge \frac{f(\bar{x}) - (1-\alpha) f(\hat{x})}{\alpha} \ge \min\{-\tilde{M}, \frac{f(\bar{x}) - \tilde{M}}{\alpha}\} =: -M$

· Sei $v \in \mathbb{R}^n$ sodass $\bar{x} + v \in Q$. Für $\beta \in [0,1]$ gilt

$f(\bar{x} + \beta v) - f(\bar{x}) \le \beta f(\bar{x} + v) + (1-\beta) f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \le \beta (M - f(\bar{x}))$

· Sei $v \in \mathbb{R}^n$ sodass $\bar{x} \pm v \in Q$. Für $\beta \in [0,1]$ gilt

$f(\bar{x} + \beta v) - f(\bar{x}) \ge f(\bar{x} + \beta v) - \left[\frac{\beta}{1+\beta} f(\bar{x} - v) + \frac{1}{1+\beta} f(\bar{x} + \beta v)\right] = \frac{\beta}{1+\beta}\left(f(\bar{x} + \beta v) - f(\bar{x} - v)\right) \ge \frac{2M\beta}{1+\beta}$

· Insgesamt ergibt sich $|f(\bar{x} + \beta v) - f(\bar{x})| \le 2\beta M$ für alle v klein genug und $\beta \in [0,1]$.

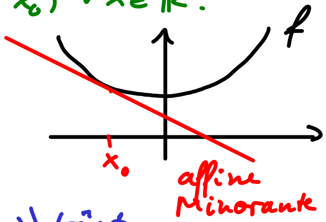
$\Rightarrow$ f ist lokal Lipschitz-stetig. $\square$

Beachte: Gilt nicht in ∞-dimensionalen Räumen:
Es gibt sogar auf Banachräumen unstetige lineare Funktionale.

Konvexe und affine Funktionen

warum?

<u>Thm:</u> Sei $f \in \operatorname{Conv}\mathbb{R}^n$. $\forall x_0 \in \operatorname{relint}\operatorname{dom} f \;\; \exists s \in \mathbb{R}^n: f(x) \geq f(x_0) + s\cdot(x-x_0) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$.



Bew: · Es gilt $\operatorname{aff}\operatorname{epi} f = (\operatorname{aff}\operatorname{dom} f) \times \mathbb{R}$

und $\operatorname{aff}\operatorname{dom} f = x_0 + V$ für einen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$.

· $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{relbdry}(\operatorname{epi} f) \Rightarrow \exists$ Hyperebene $H \not\supset \operatorname{epi} f$, die $\operatorname{epi} f$ in $(x_0, f(x_0))$ trägt,

d.h. $\exists\, \hat{s} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\hat{s}}{\alpha} \neq 0$ sodass $\binom{\hat{s}}{\alpha}\cdot\binom{x}{r} \leq \binom{\hat{s}}{\alpha}\cdot\binom{x_0}{f(x_0)} \;\; \forall\, (x,r) \in \operatorname{epi} f$;

insbesondere gilt $-\alpha r \geq -\alpha f(x_0) + \hat{s}\cdot(x-x_0)$ für alle $x \in \operatorname{dom} f$, $r \geq f(x)$.

· $\alpha < 0$: Der Limes $r \to \infty$ zeigt $\alpha \leq 0$,

und $\alpha = 0$ impliziert $0 \geq \hat{s}\cdot(x-x_0) \;\; \forall x \in \operatorname{dom} f$, d.h. $\hat{s} = 0$, ein Widerspruch.

· Dividiere durch $-\alpha \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + s\cdot(x-x_0)$ für $s = \frac{\hat{s}}{-\alpha}$. $\square$

Was ist s, wenn f differenzierbar in x_0 ist?

Differenzierbare konvexe Funktionen

Thm: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ offen, konvex, $f: C \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

f ist (strikt) konvex auf C $\iff$ $f(x) \geq (>)\ f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x \neq x_0$ aus C

Bew: „$\Rightarrow$": Sei f (strikt) konvex, $\alpha \in (0,1)$, dann gilt

$$f(x_0 + \alpha(x - x_0)) - f(x_0) \underset{<}{\leq} \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x_0) - f(x_0) = \alpha (f(x) - f(x_0)).$$

Dividiere durch α und lasse $\alpha \to 0$ $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$.

Falls Gleichheit gilt und f strikt konvex ist, sei $z = \frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} x$. Dann gilt

$$f(z) < \tfrac{1}{2} f(x_0) + \tfrac{1}{2} f(x) = \tfrac{1}{2} f(x_0) + \tfrac{1}{2}\left(f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)\right) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (z - x_0) \ ↯$$

„$\Leftarrow$": Sei $x_1 \neq x_2$ aus C, $\alpha \in (0,1)$, $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C$.

$$(E_i) \qquad f(x_i) \underset{>}{\geq} f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x_i - x_0), \qquad i = 1,2$$

$$\alpha (E_1) + (1-\alpha) E_2 : \qquad \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \underset{>}{\geq} f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \underbrace{\left[\alpha(x_1 - x_0) + (1-\alpha)(x_2 - x_0)\right]}_{x_0 - x_0 = 0}$$

$$\Rightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \underset{<}{\leq} \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \qquad \square$$

Konvexität und Monotonie der ersten Ableitung

Thm: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f: C \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn Df (strikt) monoton ist, d.h.

$$(Df(x) - Df(y))(x-y) \geq (>)\ 0 \quad \forall x, y \in C,$$ dann ist f (strikt) konvex.

Bew: Seien $x_1, x_2 \in C$, $\alpha \in (0,1)$, $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \in C$, $x_s = x_1 + s(x_2 - x_1)$

$$f(x) = f(x_1) + \int_0^\alpha \underbrace{Df(x_s)(x_2-x_1)}_{=\frac{d}{ds} f(x_s)}\, ds \quad (E_1) \qquad f(x_2) = f(x) + \int_\alpha^1 Df(x_s)(x_2-x_1)\, ds \quad (E_2)$$

$$(1-\alpha)(E_1) - \alpha(E_2) \implies f(x) = (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2) + \underbrace{\left[(1-\alpha)\int_0^\alpha Df(x_s)\, ds - \alpha \int_\alpha^1 Df(x_s)\, ds\right](x_2 - x_1)}_{A}$$

$$A = \alpha(1-\alpha)\int_0^1 Df(x_{\alpha s}) - Df(x_{\alpha + (1-\alpha)s})\, ds\, (x_2 - x_1) \leq (<)\ 0. \qquad \square$$

Thm: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f: C \to \mathbb{R}$ differenzierbar. f (strikt) konvex $\implies$ Df (strikt) monoton.

Bew: $f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2) + Df(x_2)(x_1 - x_2)$ & $f(x_2) \underset{(>)}{\geq} f(x_1) + Df(x_1)(x_2 - x_1)$.

Nun addiere beide Ungleichungen. $\square$

Kor: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f: C \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann

(a) $D^2 f$ (strikt) positiv definit $\implies$ f (strikt) konvex (b) f konvex $\implies$ $D^2 f$ pos. semi-def.

Bew: (strikte) positive Definitheit von $D^2 f$ $\Longleftrightarrow$ (strikte) Monotonie von Df. $\square$

Konvexitätserhaltende Operationen

Thm: i) Seien $f_1, \ldots, f_m \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, $t_1, \ldots, t_m > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f_1(x_0), \ldots, f_m(x_0) < \infty$.

Dann ist $\sum_{i=1}^{m} t_i f_i \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$.

ii) Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affin mit Bild $A \cap \operatorname{dom} f \neq \emptyset$. Dann gilt $f \circ A \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$.

iii) Seien $f_i \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, $i \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f_i(x_0) < M < \infty$ $\forall i \in J$.

Dann gilt $x \mapsto \sup_{i \in J} f_i(x) \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$.

iv) Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, $h \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}$ monoton wachsend, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0) \in \operatorname{dom} h$. $h \circ f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$.

v) Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $C \subset \mathbb{R}^{n_2}$ konvex, $g(x) = \inf_{y \in C} f(x,y)$. Wenn $g(x) > -\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $g \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$.

Bsp: Moreau-Yosida-Approximation für $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$: $f_\lambda(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|x-y\|_2^2$.

Bew: i), ii), iv) – HA

iii) Sei $f(x) = \sup_{i \in J} f_i(x)$. $\operatorname{epi} f = \bigcap_{i \in J} \operatorname{epi} f_i$ ist konvex und nichtleer, da $(x_0, M) \in \operatorname{epi} f$.

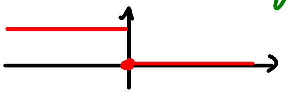
v) Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sei $A_x = \{(x,t) \in A\}$ der vertikale Schnitt in x und $\operatorname{cl}_v A = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \overline{A_x}$ der vertikale Abschluss. Es gilt A konvex $\Rightarrow$ $\operatorname{cl}_v A$ konvex.

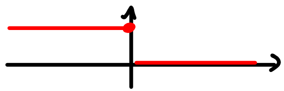
$\operatorname{epi} g = \operatorname{cl}_v \{(x,t) \mid \exists y \in C: (x,y,t) \in \operatorname{epi} f\} = \operatorname{cl}_v \left(P_{\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}} (\operatorname{epi} f) \right)$ ist konvex. $\square$

Unterhalbstetigkeit

Def: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt unterhalb-stetig, wenn $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Bsp: $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$ ist unterhalbstetig, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ nicht.





Thm: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(a) f ist unterhalb-stetig

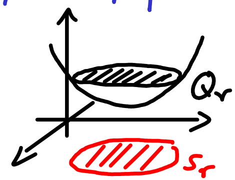
(b) $\operatorname{epi} f$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

(c) Die Subniveau-Mengen $S_r(f)$ sind abgeschlossen für alle $r \in \mathbb{R}$.

Bew: (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $(y_k, r_k) \in \operatorname{epi} f$, $(y, r) = \lim_{k \to \infty} (y_k, r_k)$.

$r = \lim_{k \to \infty} r_k \geq \liminf_{k \to \infty} f(y_k) \geq \liminf_{x \to y} f(x) \geq f(y)$, daher ist $(y, r) \in \operatorname{epi} f$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $A_r(x) = (x, r)$, $Q_r = \operatorname{epi} f \cap (\mathbb{R}^n \times \{r\})$. Q_r ist abgeschlossen, A_r stetig. $S_r(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq r\} = A_r^{-1}(Q_r)$ ist abgeschlossen.



(c) $\Rightarrow$ (a): Angenommen, (a) sei falsch, d.h. $\exists\, y_k \to x$ mit $\rho = \lim_{k \to \infty} f(y_k) < f(x)$. Sei $r \in (\rho, f(x))$.

Für $k > k_0$ groß genug gilt $f(y_k) \leq r < f(x)$, d.h. $y_k \in S_r(f) \ \forall k > k_0$, aber $x \notin S_r(f)$ ↯ □

Abgeschlossene konvexe Funktionen

Def.: Eine Funktion heißt abgeschlossen, wenn sie unterhalbstetig auf $\mathbb{R}^n$ ist (d.h. epi f abgeschlossen ist)

- Die Relaxation (oder unterhalbstetige Hülle) einer Funktion f ist definiert durch

$$\bar{f}(x) := \operatorname{cl} f(x) := \liminf_{y \to x} f(y) \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$$

Thm: $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n \Rightarrow \bar{f} \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, und $f = \bar{f}$ auf $\operatorname{relint} \operatorname{dom} f$.

Bew.: · f konvex $\Rightarrow$ epi f konvex $\Rightarrow$ $\operatorname{epi} \bar{f} = \overline{\operatorname{epi} f}$ konvex $\Rightarrow$ $\bar{f}$ konvex.

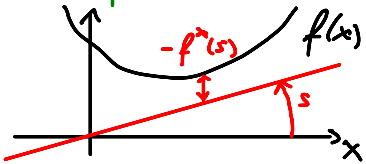
Außerdem gilt $\bar{f} \leq f \not\equiv \infty$ und $\bar{f} > -\infty$ überall (wegen Minorisierung durch affine Fkt.)

· Kürze $D = \operatorname{aff} \operatorname{dom} f$ ab. $f|_D$ ist stetig auf $\operatorname{relint} \operatorname{dom} f$,

also $\bar{f}|_D = \overline{f|_D} = f|_D$ auf $\operatorname{relint} \operatorname{dom} f$

$\Rightarrow f = \bar{f}$ auf $\operatorname{relint} \operatorname{dom} f$ $\square$

Die konjugierte Funktion



Def.: Die konjugierte Funktion (Legendre-Fenchel-Duale) einer Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (nicht notwendigerweise konvex) ist definiert als

$$f^*(s)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} s\cdot x - f(x),\quad s\in\mathbb{R}^n$$

· Die Abbildung $f\mapsto f^*$ heißt Legendre-Fenchel-Transformation

Thm: (Fenchel-Young-Ungleichung) $f^*(y)+f(x)\ge x\cdot y\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$

Bsp: $f(x)=\begin{cases} x\log x - x, & x\ge 0\\ \infty & \text{sonst}\end{cases}$, $f^*(y)=e^y$, Young-Ungleichung $xy\le x\log x - x + e^y\quad \forall x\ge 0, y\in\mathbb{R}$

Thm: Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $f\not\equiv\infty$, $f\ge g$ für eine affine Funktion g. f^* ist abgeschlossen & konvex.

Bew: · f^* ist Supremum von affinen Funktionen $y\mapsto f_x(y)=y\cdot x-f(x)$ $\Rightarrow$ f^* ist konvex.

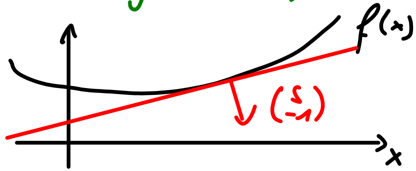
· $\operatorname{epi} f^* = \bigcap_{x\in\mathbb{R}^n}\operatorname{epi} f_x$ ist abgeschlossen als Schnitt von Halbräumen $\Rightarrow$ f^* ist abgeschlossen.

· $f^*\not\equiv\infty$: Sei $g(x)=s_0\cdot x+r_0$, dann ist $f^*(s_0)=\sup_x s_0\cdot x - f(x)\le \sup_x s_0\cdot x - g(x) = -r_0$ $\square$

Die Bikonjugierte

Thm: Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $f\not\equiv\infty$, $f(x)\geq s_0\cdot x+r_0$ für ein $(s_0,r_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$.

Es gilt $\operatorname{epi} f^{**}=\overline{\operatorname{conv}}\operatorname{epi} f$, d.h. f^{**} ist die größte abgeschlossene konvexe Funktion unterhalb f („konvexe Relaxation", „konvexe, unterhalb-stetige Hülle").



Kor: $f^{**}=f \iff f$ ist abgeschlossen & konvex

Bew: Sei $\Sigma=\{(s,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid f(x)\geq s\cdot x-r\ \forall x\}$ = Parameter der tragenden Hyperebenen von epi f

$\binom{s}{-1}\cdot\binom{x}{f(x)}\leq r$

- $f^{**}=\sup\limits_{(s,r)\in\Sigma}(s\cdot x-r)$ = sup über alle tragenden Hyperebenen der vertikalen Komponente in x

In der Tat, $(s,r)\in\Sigma \iff r\geq\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} s\cdot x-f(x)=f^*(s)$.

Somit gilt $\sup\limits_{(s,r)\in\Sigma}(s\cdot x-r)=\sup\limits_{(s,r)\text{ mit } f^*(s)\leq r}(s\cdot x-r)=\sup\limits_{s} s\cdot x-f^*(s)=f^{**}(x)$.

- $\operatorname{epi} f^{**}=\{(x,t)\mid f^{**}(x)\leq t\}=\{(x,t)\mid \sup\limits_{(s,r)\in\Sigma}(s\cdot x-r)\leq t\}=\bigcap\limits_{(s,r)\in\Sigma}\{(x,t)\mid s\cdot x-r\leq t\}$

= Schnitt aus allen Halbräumen, die epi f enthalten $=\overline{\operatorname{conv}}\operatorname{epi} f$ $\square$

Beispiele

Bsp.: Wenn f konvex & differenzierbar, dom $f = \mathbb{R}^n$:

$$x^* = \operatorname{argmax}_x \; y \cdot x - f(x) \Longleftrightarrow y = \nabla f(x^*) \qquad \Longrightarrow f^*(y) = \nabla f(x^*) \cdot x^* - f(x^*)$$

- Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + b^T x$.

  $$f^*(y) = \max_x \; y^T x - \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$$

  $$y = \nabla f(x^*) = Q x^* + b \Rightarrow x^* = Q^{-1}(y - b) \Rightarrow f^*(y) = \frac{1}{2} (y-b)^T Q^{-1} (y-b)$$

- Spezialfall $Q = I$, $b = 0$, d.h. $f(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2 \Rightarrow f^*(y) = \frac{1}{2} \|y\|_2^2$

- Fenchel-Ungleichung: $x^T Q x + y^T Q^{-1} y \geq 2 x \cdot y$ (Fall $b = 0$)

  $\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \geq 2 x \cdot y$ (Fall $b = 0$, $Q = I$)

- $f(x) = I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in C \subset \mathbb{R}^n \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \Longrightarrow I_C^*(y) = \sup_{x \in C} y \cdot x =: b_C(y)$

  „Indikatorfunktion" „Trägerfunktion"

- Spezialfall $C =$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$: $b_C(y) = I_{C^\perp}(y)$

- $C = B(0,1) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \} \Rightarrow b_C(y) = \|y\|_*$ für die duale Norm $\|y\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} |x \cdot y|$

- $\|\cdot\|_p$ & $\|\cdot\|_q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sind duale Normen $\Longrightarrow b_{B(0,1), \|\cdot\|_p} = \|\cdot\|_q$

Rechenregeln

Thm: Seien $f, f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $f, f_i \not\equiv \infty$, $f, f_i \geq g, g_i$ für affine Funktionen g, g_i

$h(x)$	$h^*(y)$
$f(x)+r$	$f^*(y)-r$
$tf(x)$, $t>0$	$t f^*(\frac{y}{t})$
$f(tx)$, $t \neq 0$	$f^*(\frac{y}{t})$
$f(Ax)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar	$f^*(A^{-T}y)$
$f(x-x_0)$	$f^*(y)+y\cdot x_0$

$h(x)$	$h^*(y)$
$f(x)+y_0\cdot x$	$f^*(y-y_0)$
$\sum_{j=1}^m f_j(x_j)$, $x=(x_1,\dots,x_m)$, $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$	$\sum_{j=1}^m f_j^*(y_j)$, $y=(y_1,\dots,y_m)$
$\leq f(x)$	$\geq f^*(y)$
$\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$, $\alpha \in [0,1]$	$\leq \alpha f_1^* + (1-\alpha) f_2^*$

„Konvexität der Konjugation"

Def: Gegeben $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ist ihre <u>Infimalkonvolution</u> gegeben durch

$$(f \square g)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) + g(x-y) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} f(x-y)+g(x)$$

· <u>Moreau-Yosida-Approximation</u> $f_\lambda = f \square \frac{1}{2\lambda}\|\cdot\|_2^2$

Thm: $(f \square g)^* = f^* + g^*$ Achtung! Wenn $f, g, f^* \square g^*$ abgeschl. & konvex, dann $(f+g)^* = f^* \square g^*$, aber nicht generell

Bew: $(f\square g)^*(y) = \sup_x x\cdot y - \inf_{x_1+x_2=x} (f(x_1)+g(x_2)) = \sup_{x_1,x_2} (x_1+x_2)\cdot y - f(x_1) - g(x_2) = f^*(y)+g^*(y)$ $\square$

Koerzivität und die Konjugierte

Def:
- Eine Funktion f heißt koerziv oder 0-koerziv, wenn $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$
- f heißt 1-koerziv, wenn $\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = \infty$

Thm: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $f \not\equiv \infty$, $f(x) \geq y_0 \cdot x + r_0$. f 1-koerziv $\Rightarrow f^* < \infty$

Bew: Sei $y \in \mathbb{R}^n$. (a) $\exists R > 0 : f(x) \geq \|y\|_2 \|x\|_2 \quad \forall \|x\|_2 \geq R$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\Longrightarrow} x \cdot y - f(x) \leq 0 \quad \forall \|x\|_2 \geq R \Rightarrow \sup_{\|x\|_2 \geq R} x \cdot y - f(x) \leq 0$$

(b) $$\sup_{\|x\|_2 < R} x \cdot y - f(x) \leq \sup_{\|x\|_2 < R} x \cdot y - y_0 \cdot x - r_0 \leq R \|y - y_0\|_2 - r_0$$

(a) & (b) $\Rightarrow f^*(y) \leq \max(0, R\|y - y_0\|_2 - r_0)$ $\square$

Thm: $F_1 := \{$Trägerfunktionen konvexer Mengen$\} = \{$abgeschlossene konvexe positiv homogene Fkt$\} =: F_2$

Bew: $\sigma \in F_1 \Leftrightarrow \sigma = I_C^*$ für ein konvexes $C \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \sigma$ ist abgeschl. konvex mit $\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x)$ für $\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \sigma \in F_2$

$$\sigma \in F_2 \Rightarrow \sigma^*(y) = \sup_x x \cdot y - \sigma(x) = \sup_{\lambda \geq 0, x} \lambda x \cdot y - \sigma(\lambda x) = \sup_{\lambda \geq 0} \lambda \sigma^*(y) = I_C(y)$$

für $C = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \sigma^*(y) = 0\}$; da σ^* konvex, ist auch C konvex $\Rightarrow \sigma \in F_1$ $\square$

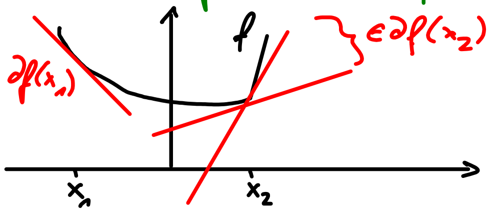
Kor: $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$ pos. homogen $\Rightarrow \operatorname{cl} f = \sigma_C$ für die abgeschl. konvexe Menge $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot y \leq f(y) \, \forall y \in \mathbb{R}^n\}$

Bew:
- $\operatorname{cl} f \in F_2 \Rightarrow \operatorname{cl} f \in F_1 \Rightarrow \operatorname{cl} f = \sigma_C$ für ein konvexes $C \subset \mathbb{R}^n$
- $f^*(x) = \sigma_C^*(x) = I_C(x) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } \exists y \in \mathbb{R}^n : x \cdot y > f(y) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\square$

Das Subdifferential

Def: · Das <u>Subdifferential</u> einer Funktion $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$ ist $\partial f(x) = \{ s \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + s \cdot (y-x) \, \forall y \in \mathbb{R}^n \}$

· Elemente von ∂f heißen <u>Subgradienten</u>



Kor: $\partial f(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in \operatorname{relint} \operatorname{dom} f$ (siehe früheren Beweis)

Thm: $\partial f(x)$ ist abgeschlossen und konvex für alle $x \in \operatorname{dom} f$ (für $x \notin \operatorname{dom} f$, $\partial f(x) = \emptyset$)

Bew: $\partial f(x) = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} \{ s \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + s \cdot (y-x) \}$ ist der Schnitt von Halbräumen. $\square$

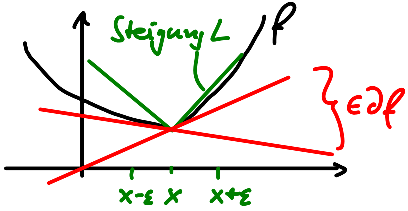
Thm: $\partial f(x)$ ist beschränkt für alle $x \in$ notwendig? $\operatorname{int} \operatorname{dom} f$.

∂f ist · nicht leer · kompakt · konvex

Bew: Es gibt $\varepsilon > 0$ sodass f auf $B(x, \varepsilon)$ Lipschitz-stetig ist (Erinnerung: $f \in C^{0,1}_{loc}$!)

Sei $y = x + \frac{\delta s}{|s|}$ für $s \in \partial f(x)$, $\delta \in (0, \varepsilon)$, dann

$$\underbrace{f(x) + L\delta}_{\uparrow \text{ Lipschitz-Konstante}} \geq f(y) \underset{\uparrow\, s \in \partial f(x)}{\geq} f(x) + s \cdot \frac{\delta s}{|s|} = f(x) + \delta |s| \Rightarrow |s| \leq L \quad \square$$



Subdifferential und Richtungsableitung

Def: Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$. Die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ an $x \in \operatorname{dom} f$ ist definiert als

$$\partial_v f(x) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0, \lambda > 0} \frac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda}$$

Bem: $\partial_{(\cdot)} f(x)$ für $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$ ist konvex: $\partial_{\frac{v_1+v_2}{2}} f(x) = \lim_{\lambda \to 0, \lambda > 0} \frac{f(x+\lambda \frac{v_1+v_2}{2}) - f(x)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \to 0, \lambda > 0} \left(\frac{f(x+\lambda v_1) - f(x)}{\lambda} + \frac{f(x+\lambda v_2) - f(x)}{\lambda} \right) / 2$

Thm: · Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{dom} f$. $\quad s \in \partial f(x) \iff \partial_v f(x) \geq s \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

· $\operatorname{cl}(\partial_{(\cdot)} f(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Trägerfunktion der abgeschlossenen konvexen Menge $\partial f(x)$, $v \mapsto \sup_{s \in \partial f(x)} s \cdot v$.

Bew: · $s \in \partial f(x) \iff \frac{f(x+\lambda v) - f(x)}{\lambda} \geq v \cdot s \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0 \iff \partial_v f(x) \geq s \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

· $\partial_{(\cdot)} f(x)$ ist pos. homogen

$\Rightarrow \operatorname{cl}(\partial_{(\cdot)} f(x)) = \sigma_C$ für $C = \{ s \in \mathbb{R}^n \mid s \cdot v \leq \partial_v f(x) \ \forall v \in \mathbb{R}^n \} = \partial f(x)$ $\quad \square$

Thm: Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$. $\partial f(x)$ ist nichtleer & beschränkt $\iff x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$

Bew: $\partial f(x) \neq \emptyset$ & beschr. $\iff |\sigma_{\partial f(x)}| < \infty$ überall $\iff \operatorname{cl}(\partial_{(\cdot)} f(x)) < \infty$

$\underset{\text{Konvexität von } \partial_{(\cdot)} f(x)}{\iff} \partial_{(\cdot)} f(x) < \infty \iff x \in \operatorname{int} \operatorname{dom} f$ $\quad \square$

Beziehung zu Ableitung

Thm: Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$. f ist differenzierbar in x mit $\nabla f(x) = s \iff \partial f(x) = \{s\}$

Bew: „$\Rightarrow$": Sei $\tilde{s} \in \partial f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$. Subdifferential: $f(x+v) \geq f(x) + \tilde{s} \cdot v$

$-$ Taylor : $f(x+v) = f(x) + \nabla f(x) \cdot v + o(|v|)$

$$0 \geq (\tilde{s} - \nabla f(x)) \cdot v + o(|v|) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

„$\Leftarrow$": $(\operatorname{cl} \partial_{(\cdot)} f(x))(v) = \sigma_{\partial f(x)}(v) = s \cdot v$

$\Rightarrow \partial_v f(x) = s \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ (da für g konvex $\operatorname{cl} g \neq g$ höchstens auf rel bdry dom g)

$\Rightarrow \nabla f(x) = s$ $\square$

Thm: Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$ $x^* = \operatorname{argmin}_x f(x) \iff 0 \in \partial f(x^*)$

Bew: $x^* = \operatorname{argmin}_x f(x)$

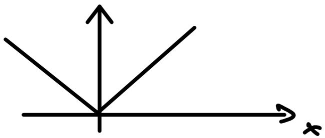
$\iff f(x) \geq f(x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\iff f(x) \geq f(x^*) + 0 \cdot (x - x^*) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\iff 0 \in \partial f(x^*)$ $\square$

Konvexe Analysis: Das Subdifferential

Beispiele und Eigenschaften



Bsp: · $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R} \Rightarrow \partial f(x) = \begin{cases}\{\operatorname{sign} x\}, & x\neq 0\\ [-1,1], & x=0\end{cases}$

· $f(x)=|x|=\|x\|_2,\ x\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \partial f(x)=\begin{cases}\{x/|x|\}, & x\neq 0\\ B_{\|\cdot\|_2}(0,1), & x=0\end{cases}$

· $f(x)=\|x\|,\ x\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \partial f(0)=\{s\in\mathbb{R}^n \mid \|y\|\ge s\cdot y\ \forall y\in\mathbb{R}^n\} = \{s\in\mathbb{R}^n \mid \max_{\|y\|=1} s\cdot y \le 1\} = B_{\|\cdot\|_*}(0,1)$

· $f(x)=\|x\|_\infty,\ x\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \partial f(0)=B_{\|\cdot\|_1}(0,1)=\operatorname{conv}(\pm e_1,\dots,\pm e_n)$, $\quad e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$

Thm: Seien $f_1,\dots,f_m\in\operatorname{Conv}\mathbb{R}^n$, $t_1,t_2>0$, dann gilt

(a) $\partial(t_1f_1+t_2f_2)(x)=t_1\,\partial f_1(x)+t_2\,\partial f_2(x)=\{t_1s_1+t_2s_2 \mid s_1\in\partial f_1(x),\ s_2\in\partial f_2(x)\}$

$\forall x\in\operatorname{int}(\operatorname{dom} f_1\cap\operatorname{dom} f_2)$ („Moreau-Rockafellar") (int ist notwendig! z.B. $f_1=I_{\{y\ge x^2\}},\ f_2=I_{\{y\le 0\}}$)

(b) $\partial\left(\max_{i=1,\dots,m} f_i\right)(x)=\operatorname{conv}\left(\bigcup_{j\in J_x}\partial f_j(x)\right)$ mit $J_x=\{j \mid f_j(x)=\max_{i=1,\dots,m} f_i(x)\}$

Bew: (b) ohne Beweis (siehe z.B. Bauschke & Combettes)

(a) „$\supset$": Sei $s=t_1s_1+t_2s_2$ mit $s_1\in\partial f_1(x)$, $s_2\in\partial f_2(x)$

$$t_1f_1(y)+t_2f_2(y) \ge t_1(f_1(x)+s_1\cdot(y-x))+t_2(f_2(x)+s_2\cdot(y-x))$$

$$= (t_1f_1(x)+t_2f_2(x))+s\cdot(y-x) \qquad \forall y\in\mathbb{R}^n$$

Beispiele und Eigenschaften (Forts.)

„$\subset$": Sei $s\in\partial(t_1f_1+t_2f_2)(x)$, setze $g_1 = t_1 f_1 - t_1 f_1(x) - s\cdot(\cdot - x)$, $g_2 = t_2 f_2 - t_2 f_2(x)$

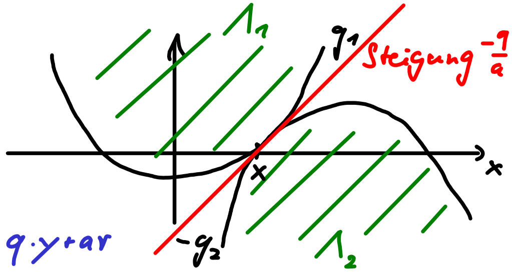
$\Rightarrow 0\in\partial(g_1+g_2)(x)$, $0 = g_1(x) = g_2(x)$, $\begin{cases}\partial g_2(x) = \partial t_2 f_2(x) = t_2\,\partial f_2(x)\\ \partial g_1(x) = \partial t_1 f_1(x) - s = t_1\,\partial f_1(x) - s\end{cases}$

warum?

$\Rightarrow$ zu zeigen: $0\in\partial g_1(x)+\partial g_2(x)$

- $\Lambda_1 = \operatorname{epi} g_1$, $\Lambda_2 = -\operatorname{epi} g_2$ sind beide konvex mit nichtleerem Inneren (warum?)
- $\operatorname{int}\Lambda_1\cap\Lambda_2=\emptyset$ (da $g_1+g_2\ge 0$, somit $g_1\ge -g_2$)

$\Rightarrow \exists\, 0\ne\binom{q}{a}\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$: $\sup\limits_{(y,r)\in\Lambda_1} q\cdot y + ar \le \inf\limits_{(y,r)\in\Lambda_2} q\cdot y + ar$



- Wegen $(x,0)\in\Lambda_1\cap\Lambda_2$ gilt sogar $\max\limits_{(y,r)\in\Lambda_1} q\cdot y+ar = q\cdot x = \min\limits_{(y,r)\in\Lambda_2} q\cdot y + ar$
- $a<0$: $(x,r)\in\Lambda_1\ \forall r>0 \Rightarrow a\le 0$, und $a=0$ würde implizieren $\sup\limits_{y\in\operatorname{dom} f_1} q\cdot y \le \inf\limits_{y\in \operatorname{dom} f_2} q\cdot y$, und dies widerspricht $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f_1\cap \operatorname{dom} f_2) \ne\emptyset$
- Setze $p = -\frac{q}{a}$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{(y,r)\in\Lambda_1} p\cdot y - r = p\cdot x = \min\limits_{(y,r)\in\Lambda_2} p\cdot y - r$

wähle $r=g_1(y) \Rightarrow p\in\partial g_1(x)$ wähle $r=-g_2(y) \Rightarrow -p\in\partial g_2(x)$ $\square$

Subdifferential und Konjugierte

Thm: Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$. $\quad s \in \partial f(x) \iff f^*(s) + f(x) = s \cdot x$

Bew:
- $f^*(s) \geq s \cdot x - f(x)$ (Fenchel-Ungleichung)
- $s \in \partial f(x) \iff s \cdot y - f(y) \leq s \cdot x - f(x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

$\iff f^*(s) \leq s \cdot x - f(x)$ $\square$

Kor: Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. $s \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(s)$

Bew: $s \in \partial f(x) \iff f^*(s) + f(x) = s \cdot x \iff f^{**}(x) + f^*(s) = s \cdot x \iff x \in \partial f^*(s)$ $\square$

Kor: Sei $f \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, dann gilt

$$x^* = \operatorname{argmin}_x f(x) \iff 0 \in \partial f(x^*) \iff x^* \in \partial f^*(0).$$

Insbesondere gilt: Ist f^* differenzierbar in 0, ist der Minimierer eindeutig.

Slaters Bedingung („constraint qualification")

Thm: (Slater) Betrachte $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x)$ s.d. $f_1(x), \dots, f_m(x) \le 0$, $h_1(x), \dots, h_p(x) = 0$ (P)

für $f_0, \dots, f_m$ konvex, $h_1, \dots, h_p$ affin (d.h. $h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0 \iff Ax = b$), $\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \operatorname{dom} f_i$.

Wenn (P) strikt zulässig ist, d.h. $\exists \tilde{x} \in \operatorname{relint} \mathcal{D}$ mit $f_i(\tilde{x}) < 0$, $i = 1, \dots, m$, $A\tilde{x} = b$,

dann gilt starke Dualität, d.h. $p^* = d^*$.

Beweis ohne diese Annahmen später

Bew: Vereinfachende Annahmen: $\operatorname{relint} \mathcal{D} = \operatorname{int} \mathcal{D}$, $\operatorname{rank} A = p$

(Beides kann erreicht werden durch Übergang zu einem äquivalenten Problem: streiche linear abhängigen Zeilen aus $Ax = b$ & schränke ein auf $\operatorname{aff} \mathcal{D}$.

Beachte: das duale Problem ändert sich hierdurch!)

- $\tilde{x}$ ist zulässig $\Rightarrow p^* < \infty$. OBdA $p^* > -\infty$ (sonst wäre $d^* = -\infty$ wegen schwacher Dualität)
- definiere $M = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathcal{X}: f_i(x) \le u_i, i = 1, \dots, m, h_i(x) = v_i, i = 1, \dots, p, f_0(x) \le t\}$

$N = \{(0, 0, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}$

$\Rightarrow M, N$ konvex, nichtleer, disjunkt (sonst gäbe es ein zulässiges x mit $f_0(x) < p^*$)

Slaters Bedingung (Forts.)

- es existiert trennende Hyperebene, d.h. $(\mu, \lambda, \nu) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sodass

$$\text{(a)} \quad \mu \cdot u + \lambda \cdot v + \nu t \geq \alpha \qquad \forall (u,v,t) \in M$$

$$\text{(b)} \quad \mu \cdot u + \lambda \cdot v + \nu t \leq \alpha \qquad \forall (u,v,t) \in N$$

- (a) $\Rightarrow \mu \geq 0$ (komp.-weise), $\nu \geq 0$ (sonst wäre $\mu \cdot u + \nu t$ nach unten unbeschränkt in M)

  (b) $\Rightarrow \nu p^* \leq \alpha$

- zusammen: $\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) + \nu f_0(x) \geq \alpha \geq \nu p^* \qquad \forall x \in \mathcal{D}$

  Fall $\nu > 0$: $\Rightarrow L\left(x, \frac{\mu}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right) \geq p^* \;\; \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow g(\mu/\nu, \lambda/\nu) \geq p^* \Rightarrow d^* \geq p^*$

  Fall $\nu = 0$: $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(\tilde{x}) \geq 0 \;\; \underset{\mu_i \geq 0,\, f_i(\tilde{x}) < 0}{\Longrightarrow} \;\; \mu = 0$

  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}$

  Dies ist nicht möglich, denn $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(\tilde{x}) = 0 = \lambda^T(A\tilde{x} - b)$ zusammen mit $\operatorname{rank} A = p$ impliziert die Existenz eines $x \in \mathcal{D}$ mit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) < 0$ $\lightning$

  $\Rightarrow \nu = 0$ ist nicht möglich $\square$

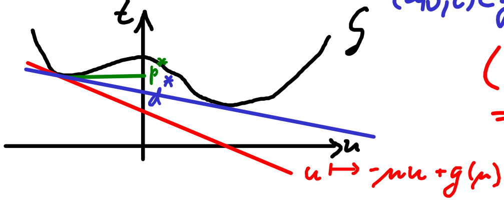
<u>Kor</u>: $(\mu^*, \lambda^*) = (\mu/\nu, \lambda/\nu)$ sind dual optimal!

Slaters Bedingung - geometrische Intuition

$\mathcal{G} = \{(u, v, t) \in \mathbb{R}^{m+p+1} \mid \exists\, x \in \mathcal{D},\ f_i(x) = u_i,\ h_i(x) = v_i,\ f_0(x) = t\}$

Erinnerung: $g(\mu, \lambda) = \inf_x f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = \inf_{(u,v,t) \in \mathcal{G}} t + \mu^T u + \lambda^T v \quad ; \quad \mu \geq 0$

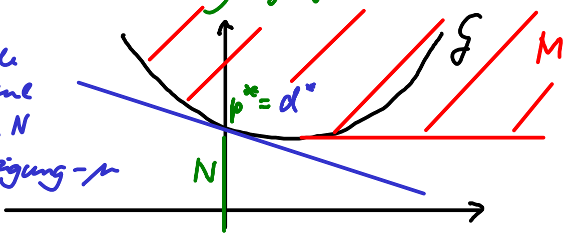
Bsp: $\min_x f_0(x)$ s.d. $f_1(x) \leq 0$



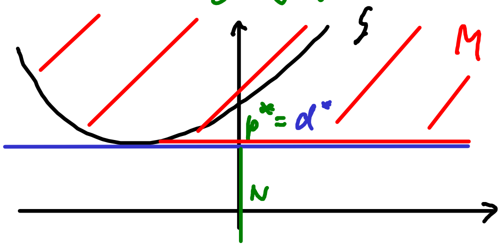
(Sei $\ell_c(u, v) = -\mu^T u - \lambda^T v + c$
$\Rightarrow \inf\{c \mid \exists (u, v) : (u, v, \ell_c(u, v)) \in \mathcal{G}\}$
$= \inf\{t + \mu^T u + \lambda^T v \mid (u, v, t) \in \mathcal{G}\}$)

Slaters Bedingung gilt

trennende Hyperebene zw. M & N mit Steigung $-\mu$

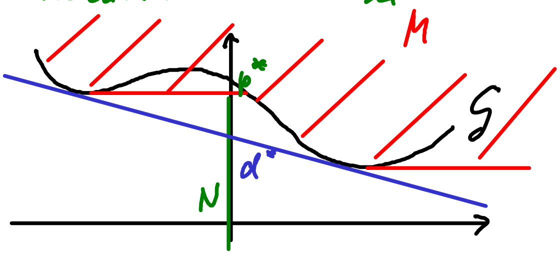


Slaters Bedingung gilt

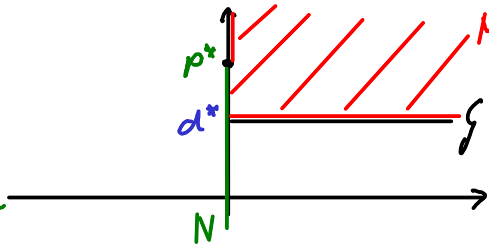


M & N können nicht getrennt werden durch eine Hyperebene mit endlicher Steigung

nichtkonvexes Problem



Kein strikt zulässiger Punkt



Folgerungen aus constraint qualifications

<u>Thm</u>: Starke Dualität gilt sogar, wenn es ein zulässiges $\bar{x} \in \operatorname{relint} \mathcal{D}$ mit $f_i(\bar{x}) < 0$ nur für alle nichtaffinen f_i.

Bew: Rockafellar: Convex Analysis, Thm. 28.2 □

Insbesondere gilt immer starke Dualität, wenn alle Nebenbedingungen affin und f_0 konvex sind, also für alle <u>LP & QP</u>!

<u>Thm</u>: Wenn das duale Problem zulässig ist und eine constraint qualification gilt (d.h. eine Bedingung wie Slater, die starke Dualität impliziert), dann gelten die KKT-Bedingungen für ein konvexes Optimierungsproblem (P) an einem optimalen Punkt x, d.h. $\exists \mu, \lambda$ s.d.

$$f_1(x), \dots, f_m(x) \le 0, \; h_1(x) = \dots = h_p(x) = 0, \quad \mu \ge 0, \quad \mu^T \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = 0,$$

$$0 \in \partial \left[f_0 + \sum_{i=1}^m \mu_i f_i + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i \right](x)$$

Bew: starke Dualität $\Rightarrow$ Sattelpunkteigenschaft von L $\Rightarrow$ x minimiert $L(\cdot, \mu, \lambda)$

wähle μ, λ dual optimal (möglich, wie zuvor gezeigt)

Fenchel-Rockafellar-Dualität

<u>Thm:</u> (Fenchel-Rockafellar) Seien $f, g \in \operatorname{Conv} \mathbb{R}^n$. Wenn

(a) $\operatorname{relint} \operatorname{dom} f \cap \operatorname{relint} \operatorname{dom} g \neq \emptyset$ oder

(b) $\operatorname{relint} \operatorname{dom} f^* \cap \operatorname{relint} \operatorname{dom} g^* \neq \emptyset$ und f, g abgeschlossen,

dann $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(x) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} -g^*(-y) - f^*(y)$.

Unter (a) wird sup angenommen, unter (b) das inf.

Bew.: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $f(x) + f^*(y) \geq x \cdot y \geq -g(x) - g^*(-y)$ (Fenchel-Ungl.)

$\Rightarrow \inf\limits_x (f(x) + g(x)) \geq \sup\limits_y -g^*(-y) - f^*(y)$

- wenn $\inf = -\infty$, dann auch $\sup = -\infty$; OBdA dürfen wir daher annehmen $-\infty < \alpha = \inf\limits_x f(x) + g(x)$
- Wenn (a) gilt, reicht es, die Existenz eines $y \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen mit $-g^*(-y) - f^*(y) \geq \alpha$
- Setze $C = \{ (x, \nu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \nu \geq f(x) \}$

  $D = \{ (x, \nu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \nu \leq -g(x) + \alpha \}$

$\Rightarrow C, D$ konvex & $\operatorname{relint} C = \{ (x, \nu) \mid x \in \operatorname{relint} \operatorname{dom} f, f(x) < \nu \}$ ist disjunkt von D

Fenchel-Rockafellar-Dualität (Forts.)

· $\exists$ trennende Hyperebene, d.h. $(s,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ mit $\sup\limits_{(x,\nu)\in D} s\cdot x + t\nu \le \inf\limits_{(x,\nu)\in C} s\cdot x + t\nu$.

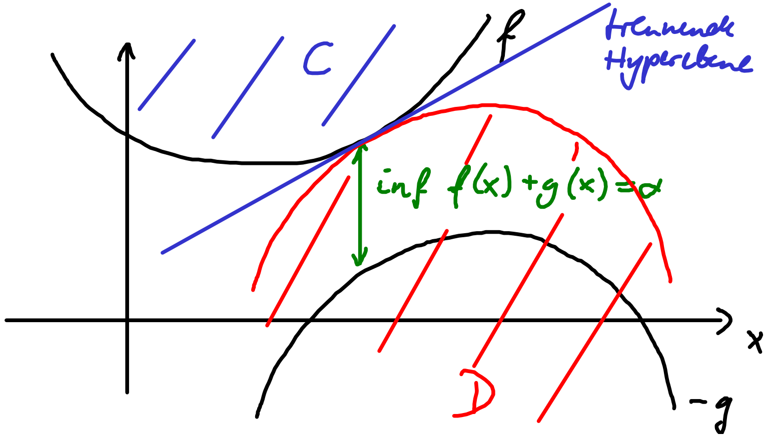
Beachte: $t\neq 0$ (sonst würden die Projektionen von D & C, $\operatorname{dom} f$ & $\operatorname{dom} g$, getrennt)

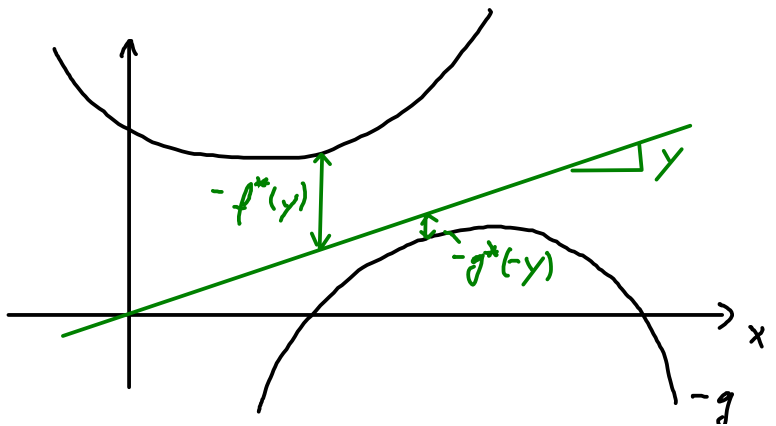
$\Rightarrow$ trennende Hyperebene ist Graph einer affinen Funktion $h(x) = \underbrace{\tilde{s}}_{=-s/t}\cdot x + \beta$

$\Rightarrow$ $f(x) \ge \tilde{s}\cdot x + \beta \ge -g(x) + \alpha \quad \forall x\in\mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{linke Ungl. impliziert } -\beta \ge \sup\limits_x \tilde{s}\cdot x - f(x) = f^*(\tilde{s}) \\ \text{rechte Ungl. impliziert } \alpha-\beta \le \inf\limits_x \tilde{s}\cdot x + g(x) = -g^*(-\tilde{s}) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \le -g^*(-\tilde{s}) - f^*(\tilde{s})$$

· für (b) folgt alles aus (a) unter Benutzung von $f = f^{**}$, $g = g^{**}$. □





Fenchel-Rockafellar-Dualität: Erweiterungen

Das Resultat kann in verschiedene Richtungen verschärft & verallgemeinert werden, z.B.

- Wenn g stückweise affin ist, dürfen wir relint dom $g^{(*)}$ ersetzen durch dom $g^{(*)}$.

(Rockafellar, Thm. 31.1)

- Wenn $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein linearer Operator ist, gilt $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Ax) = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} -g^*(-y) - f^*(A^T y)$, sofern

  (a) $\exists\, x \in$ relint dom f mit $Ax \in$ relint dom g oder

  (b) $\exists\, y \in$ relint dom g^* mit $-A^T y \in$ relint dom f^* und f, g abgeschlossen.

  Unter (a) wird das sup, unter (b) das inf angenommen. (Rockafellar, Cor 31.2.1)

- Unter denselben Bedingungen gilt $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(Ax) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in \mathbb{R}^m} x^T A^T y + f(x) - g^*(y)$,

  und man darf inf & sup vertauschen.

Bew: $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(f(x) + g(Ax)\right) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left(f(x) + g^{**}(Ax)\right) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in \mathbb{R}^m} f(x) + x^T A^T y - g^*(y)$

$$\geq \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + x^T A^T y - g^*(y) = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} -f^*(-A^T y) - g^*(y) = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} -f^*(A^T y) - g^*(-y)$$

$\Longrightarrow$ starke Dualität impliziert Gleichheit $\square$

Fenchel-Rockafellar-Dualität & Lagrange-Dualität

Bem: Für konvexe f_0, c_I, affine c_E ist Lagrange-Dualität ein Spezialfall von Fenchel-Rockafellar-Dualität:

Wähle $f((x,u,v)) = f_0(x) + I_{\{c_I(x)\le u,\, c_E(x)=v\}}((x,u,v))$, $\quad h((x,u,v)) = I_{(-\infty,0]^m\times\{0\}}((u,v))$

$$\Rightarrow \quad f^*((y,\mu,\lambda)) = \sup_{x,u,v,\ u\ge c_I(x),\ v=c_E(x)} y\cdot x+\mu\cdot u+\lambda\cdot v - f_0(x), \qquad h^*((y,\mu,\lambda)) = I_{\{0\}\times[0,\infty)^m}((y,\mu))$$

Slater $\Rightarrow$ $\exists\, x \in \operatorname{relint} \mathcal{D}$ mit $f((x,-\varepsilon,0)) < \infty$ für $\varepsilon > 0$ klein genug (komp.-weise)

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\operatorname{relint}\operatorname{dom} h}_{\mathbb{R}^n\times(-\infty,0)^m\times\{0\}} \cap \operatorname{relint}\operatorname{dom} f \neq \emptyset$$

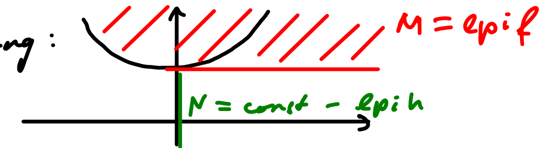
$$\Rightarrow \quad p^* = \inf_{x,\ c_I(x)\le 0,\ c_E(x)=0} f_0(x) = \inf_{(x,u,v)} f((x,u,v)) + h((x,u,v)) \overset{\text{Fenchel-Rockafellar}}{=} \max_{(y,\tilde\mu,\tilde\lambda)} -f^*((y,\tilde\mu,\tilde\lambda)) - h^*(-(y,\tilde\mu,\tilde\lambda))$$

$$= \max_{\tilde\mu\le 0,\tilde\lambda}\ \inf_{\substack{x,u,v\\ u\ge c_I(x),\ v=c_E(x)}} -\tilde\mu\cdot u - \tilde\lambda\cdot v + f_0(x) = \max_{\tilde\mu\le 0,\tilde\lambda} \underbrace{\inf_x -\tilde\mu\cdot c_I(x) - \tilde\lambda\cdot c_E(x) + f_0(x)}_{=g(-\tilde\mu,-\tilde\lambda)} = \max_{\mu\ge 0,\lambda} g(\mu,\lambda)$$

$$= d^*$$

Dies impliziert auch die Existenz eines dual optimalen Punktes (μ,λ). $\square$

Erinnerung:



Grundlagen lineare Programme

Wie erhält man Standardform? Hinweis: - neue Variablen für Ungl.- NB
- $x = x_+ - x_-$

Def.: Ein <u>lineares Programm</u> (LP) in <u>Standardform</u> ist gegeben durch

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} cx \quad \text{s.d.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0 \text{ komp.-weise}, \qquad \text{(LP)}$$

wobei $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ hat vollen Rang, $p < n$.

Es kann aufgefasst werden als Minimierung von cx über dem <u>konvexen Polyeder $K = \{x \geq 0 \mid Ax = b\}$</u>.

- Sei $B \in \mathbb{R}^{p \times p}$ eine Matrix, die aus p linear unabhängigen Spalten a_i, $i \in J \subset \{1, \dots, n\}$ von A besteht.

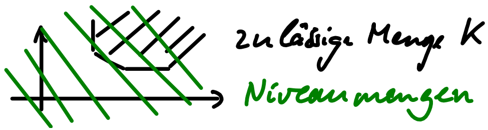
  Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = 0 \;\forall i \notin J$ und $Ax = b$ heißt <u>Basispunkt bzgl. Basis B</u>.
- Ein <u>zulässiger Punkt</u> x erfüllt $Ax = b$ & $x \geq 0$.

  Wir wollen annehmen, dass jeder zulässige Basispunkt $x_i \neq 0 \;\forall i \in J$ erfüllt.

Thm: Wenn (LP) optimale Punkte besitzt, ist mindestens einer ein Extremalpunkt von K.

Bew.: Sei $\operatorname{ext} K = \{x_1, \dots, x_k\}$, dann $\forall x \in K \;\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0: \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$.

Sei $z_0 = \min_{i=1,\dots,k} c x_i$, dann $cx = \alpha_1 (cx_1) + \dots + \alpha_k (cx_k) \geq \alpha_1 z_0 + \dots + \alpha_k z_0 = z_0 \Rightarrow z_0$ ist Min. $\square$

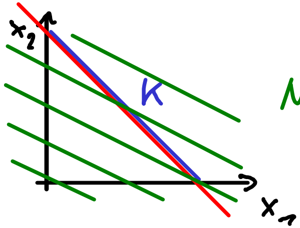


Beachte: Dies ist unabhängig von Standardform!

Beispiele

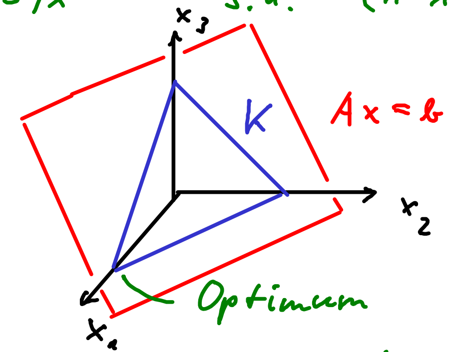
__Bsp:__

- $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} \underbrace{(1 \;\; 2)}_{c} x$ s.d. $\overbrace{(1 \;\; 1)}^{A} x = \overset{b}{2}$, $x \geq 0$

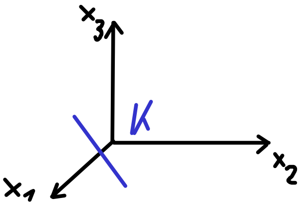


Niveaumengen von cx

- $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} (1 \;\; 2 \;\; 3) x$ s.d. $(1 \;\; 1 \;\; 1) x = 3$, $x \geq 0$



- $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} (1 \;\; 2 \;\; 3) x$ s.d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$



Beachte: Extremalpunkte von K haben n-rank A Nullen! Sind sie Basispunkte?

Optimum?

Optimierungsalgorithmen: Simplex-Verfahren (lineare Optimierung)

Basispunkte & Extremalpunkte

Thm: $x \in \operatorname{ext} K \iff x$ ist zulässiger Basispunkt

Bew: „$\Rightarrow$" · OBdA seien die Nichtnull-Einträge von x gegeben durch $x_1, \dots, x_k$

$\Rightarrow b = x_1 a_1 + \dots + x_k a_k$ mit $x_i > 0$ (Spalten von A)

· Nimm an, $a_1, \dots, a_k$ seien linear abhängig, d.h. $0 = y_1 a_1 + \dots + y_k a_k$ für y_i nicht alle $= 0$

· setze $y = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Es existiert $\varepsilon > 0$ mit $x + \varepsilon y \geq 0$, $x - \varepsilon y \geq 0$.

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y)$, was $x \in \operatorname{ext} K$ widerspricht $\lightning$

„$\Leftarrow$" · OBdA nimm $x = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ an (d.h. $a_1, \dots, a_p$ bilden eine Basis)

· Nimm an, es gibt $y, z \in K$, $\alpha \in (0,1)$ mit $x = \alpha y + (1-\alpha) z$

$\Rightarrow y_{p+1} = \dots = y_n = 0$ & $z_{p+1} = \dots = z_n = 0$ (wegen $y, z \geq 0$)

$\Rightarrow y_1 a_1 + \dots + y_p a_p = b$ & $z_1 a_1 + \dots + z_p a_p = b$

· Da $a_1, \dots, a_p$ linear unabhängig sind, folgt $y = z$

$\Rightarrow x \in \operatorname{ext} K$ $\square$

Idee des Simplex-Verfahrens

$\#\text{ext } k$ = $\#$ zulässige Basispunkte $\leq$ $\#$ Möglichkeiten, p lin. unabh. Spalten aus A zu wählen

Anzahl von

$$\leq \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Um einen optimalen Punkt zu finden, muss man nur höchstens $\binom{n}{p}$ Extremalpunkte testen.

Das Simplex-Verfahren macht dies etwas effizienter, indem es eine Folge x^k von Extremalpunkten erzeugt, wobei der Funktionswert in jedem Schritt abnimmt.

Algorithmus (Simplex-Verfahren)

0) (Initialisierung) wähle zulässigen Basispunkt / Extremalpunkt

- wähle Spalten $a_{i_1}, \dots, a_{i_p}$, $i_j \in \mathcal{J}^0$, von A als Basis
- setze $x_\ell^0 = 0$ für $\ell \notin \mathcal{J}^0$ und löse $A x^0 = b \iff a_{i_1} x_{i_1}^0 + \dots + a_{i_p} x_{i_p}^0 = b$ für $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$
- wenn der Basispunkt unzulässig ist, wähle andere Basis
- Beachte: Wir können $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination transformieren, sodass $a_{i_j} = e_j$
- Beachte: Superskriptum = Iteration; Subskriptum = Zeilen- / Spaltenindex

Algorithmus des Simplex-Verfahrens

iteriere:

1) wähle eine Abstiegsrichtung

- sei x^{k+1} der zu findende Iterationspunkt
- $x^{k+1}_{i_1}, \dots, x^{k+1}_{i_p}$ für $i_1, \dots, i_p \in J^k$ kann man ausdrücken als Fkt. von $x^{k+1}_\ell, \ell \notin J^k$: $x^{k+1}_{i_j} = \alpha_{j0} + \sum_{\ell \notin J^k} \alpha_{j\ell} x^{k+1}_\ell$ leicht, wenn $a_{i_j} = e_j$
- $c x^{k+1} = z_0 + \sum_{\ell \notin J^k} (c_\ell + z_\ell) x^{k+1}_\ell$ für $z_\ell = \sum_{j=1}^{p} c_{i_j} \alpha_{j\ell}$
- wähle $\ell \notin J^k$ mit $c_\ell + z_\ell < 0$, dann verringert sich der Funktionswert, wenn x_ℓ von 0 erhöht wir
  wenn es kein solches ℓ gibt, ist x^k optimal

2) gehe zu benachbarten zulässigen Basispunkt / Extremalpunkt

- wir möchten a_ℓ zur Basis hinzunehmen; welche von $a_{i_1}, \dots, a_{i_p}$ sollte durch a_ℓ ersetzt werden?
- $a_\ell = y_1 a_{i_1} + \dots + y_p a_{i_p} \Rightarrow (x^k_{i_1} - \alpha y_1) a_{i_1} + \dots + (x^k_{i_p} - \alpha y_p) a_{i_p} + \alpha a_\ell = b \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- wähle $x^{k+1}_{i_j} = x^k_{i_j} - \alpha y_j$, $j = 1, \dots, p$, $x^{k+1}_\ell = \alpha$, alle anderen Einträge $= 0$

wenn $y_1, \dots, y_p \leq 0$: x^{k+1} kann kein zulässiger Basispunkt werden & $p^* = -\infty$

sonst: sei $q = \operatorname{argmin}_{s = 1, \dots, p, y_s > 0} \frac{x^k_{i_s}}{y_s}$; setze $\alpha = \frac{x^k_{i_q}}{y_q}$, $i_q = \ell$, $J^{k+1} = \{i_1, \dots, i_p\}$

Man kann wieder $Ax = b$ transformieren, sodass $a_{i_j} = e_j$. einzige Wahl, die x^{k+1} zulässigen Basispunkt macht

Beispiele zum Simplex-Verfahren

Bsp: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \ (1\ \ 2\ \ 3)\,x$ s.d. $(1\ \ 1\ \ 1)\,x = 3$, $x \geq 0$

0) $\mathcal{J}^0 = \{3\} \Rightarrow x^0 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \geq 0$

1) $(1\ \ 1\ \ 1)\,x = 3 \Rightarrow x_3^1 = 3 - x_1^1 - x_2^1 \Rightarrow (1\ \ 2\ \ 3)\,x^1 = x_1^1 + 2x_2^1 + 3(3 - x_1^1 - x_2^1)$
$= 9 \underbrace{-\,2}_{c_1 - z_1} x_1^1 \underbrace{-\,1}_{c_2 - z_2} x_2^1 \Rightarrow$ wähle $\ell = 2$!

2) trivial: $\mathcal{J}^1 = \{2\} \Rightarrow x^1 = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$

1) $x_2^2 = 3 - x_1^2 - x_3^2 \Rightarrow cx^2 = 6 - x_1^2 + x_3^2 \Rightarrow$ wähle $\ell = 1$!

2) trivial: $\mathcal{J}^2 = \{1\} \Rightarrow x^2 = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$

1) $x_1^3 = 3 - x_2^3 - x_3^3 \Rightarrow cx^3 = 3 + x_2^3 + 2x_3^3 \Rightarrow x^3$ ist optimal!

Bsp: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3} \ (1\ \ 2\ \ 3)\,x$ s.d. $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $x \geq 0$

0) $\mathcal{J}^0 = \{1, 3\} \Rightarrow x^0 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \geq 0$

1) $Ax^1 = b \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^1\\x_3^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} x_2^1 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1^1\\x_3^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2 - x_2^1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow cx^1 = 1 + 2x_2^1 + 3(2 - x_2^1) \Rightarrow$ wähle $\ell = 2$!

2) $a_2 = 0\cdot a_1 + 1\cdot a_3 \Rightarrow (x_1^0 - \alpha\cdot 0)\,a_1 + (x_3^0 - \alpha\cdot 1)\,a_3 + \alpha\, a_2 = b$
$\Rightarrow q = 3,\ \alpha = x_3^0 = 2 \Rightarrow \mathcal{J}^1 = \{1, 2\},\ x^2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

1) $\Rightarrow x^2$ ist optimal!

Anwendungsbeispiel: ROF-Modell

Viele konvexe Optimierungsprobleme lassen sich schreiben als $\min_{x\in\mathbb{R}^n} F(Ax)+G(x)$

mit $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ linear, $F:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ & $G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ konvex.

Bsp: (Rudin-Osher-Fatemi-Modell) Aus der Bildverarbeitung:

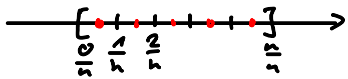
geg: verrauschtes Bild oder Signal $v:\Omega\to\mathbb{R}$ (z.B. $\Omega=[0,1]^d$)

ges: rauschfreies Signal $u:\Omega\to\mathbb{R}$

Bei weißem Rauschen (≙ unabhängig identisch normalverteilt in jedem Pixel) und wenn u stückweise konstant sein soll, ist eine gute Schätzung

$$u = \operatorname*{argmin}_u \alpha\|v-u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |Du|.$$

In 1D diskretisiert: Gitter $\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{2n}$ auf $[0,1]$



- $v,u\in\mathbb{R}^n$
- $(Du)_i = \frac{u_{i+1}-u_i}{1/n}$ (+ ggfs. Spezialbehandlung am Rand)
- $u = \operatorname*{argmin}_u F(Du) + G(u)$

mit $F(w) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n}|w_i| = \frac{1}{n}\|w\|_1$, $G(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{n}|v_i-u_i|^2 = \frac{\alpha}{n}\|v-u\|_2^2$

Der Chambolle-Pock-Algorithmus

Sei F abgeschlossen & konvex, dann gilt

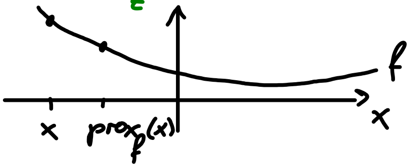
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} F(Ax)+G(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{y\in\mathbb{R}^m} \overbrace{y\cdot(Ax)}^{=(A^Ty)\cdot x} - F^*(y) + G(x)$$

Man kann nun abwechselnd ein bisschen in x minimieren und in y maximieren.

Def: Der Proximaloperator zu abgeschlossenem $f\in\operatorname{Conv}\mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{prox}_f(x) = \operatorname*{argmin}_z \frac{1}{2}\|z-x\|_2^2 + f(z)$$

= Minimierer in Moreau-Yosida-Regularisierung
ist wohldefiniert (warum?)



Alg: (Chambolle-Pock) geg: Schrittweiten $\tau,\sigma>0$, Beschleunigungsparameter $\theta\in[0,1]$, Schrittzahl N

Init: wähle $x_0\in\mathbb{R}^n$, $y_0\in\mathbb{R}^m$, setze $\bar{x}_0=x_0$, $x_{-1}=x_0$

for $n=0$ to N

$$y_{n+1} = \operatorname{prox}_{\sigma F^*}\big(\overbrace{y_n+\sigma A\bar{x}_n}^{\text{vergrößert } y\cdot(A\bar{x}_n)}\big)$$

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\tau G}\big(\overbrace{x_n-\tau A^T y_{n+1}}^{\text{verkleinert } (A^T y_{n+1})\cdot x}\big)$$

$$\bar{x}_{n+1} = x_{n+1}+\theta(x_{n+1}-x_n)$$

end

Breakout-Room 1: Berechne Formel für $\mathrm{prox}_{\sigma F^*}(y)$

Breakout-Room 2: Berechne Formel für $\mathrm{prox}_{\tau G}(x)$

Breakout-Room 3: Berechne Matrix D, Dx, $D^T y$

Implementiere Verfahren als python-jupyter-Notebook
unter https://jupyterhub.wwu.de/

Wähle $\tau<1/n$, $\theta=1$, $v(x)\sim\mathrm{round}(\sin(4x))+\mathrm{round}(\cos(9x))$
$+$Gauß-Rauschen

Der Chambolle-Pock-Algorithmus II

Thm: $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{y\in\mathbb{R}^m} y\cdot(Ax) - F^*(y) + G(x)$ habe einen Sattelpunkt $(\hat{x},\hat{y})$. Wähle $\theta=1$, $\tau\sigma\|A\|^2<1$,

(a) $$\frac{\|y_n-\hat{y}\|_2^2}{2\sigma} + \frac{\|x_n-\hat{x}\|_2^2}{2\tau} \le \frac{1}{1-\tau\sigma\|A\|^2}\left(\frac{\|y_0-\hat{y}\|_2^2}{2\sigma} + \frac{\|x_0-\hat{x}\|_2^2}{2\tau}\right) \quad \forall n$$

(b) Sei $x^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_n$, $y^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N y_n$, $B_1\times B_2 \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ beschränkt. Die eingeschränkte Primal-Dual-Lücke $D_{B_1\times B_2}(x,y) = \max_{y'\in B_2}\left(y'\cdot Ax - F^*(y') + G(x)\right) - \min_{x'\in B_1}\left(y\cdot Ax' - F^*(y) + G(x')\right)$

erfüllt $$D_{B_1\times B_2}(x^N,y^N) \le \left(\sup_{(x,y)\in B_1\times B_2} \frac{\|x-x_0\|_2^2}{2\tau} + \frac{\|y-y_0\|_2^2}{2\sigma}\right)/N.$$

(c) $x_n \longrightarrow x^*$, $y_n \longrightarrow y^*$ für einen Sattelpunkt (x^*,y^*).

(Nur in endlichen Dimensionen; sonst sind nur schwache Häufungspunkte von (x^N,y^N) Sattelp.)

Bem: Wenn $(\hat{x},\hat{y})\in B_1\times B_2$, dann
$$D_{B_1\times B_2}(x,y) \ge \left(\hat{y}\cdot Ax - F^*(\hat{y}) + G(x)\right) - \left(y\cdot A\hat{x} - F^*(y) + G(\hat{x})\right)$$
$$\ge \left(\hat{y}\cdot A\hat{x} - F^*(\hat{y}) + G(\hat{x})\right) - \left(\hat{y}\cdot A\hat{x} - F^*(\hat{y}) + G(\hat{x})\right) = 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn (x,y) auch ein Sattelpunkt ist.

Bew: • $p = \mathrm{prox}_f\, q \Rightarrow q - p \in \partial f(p)$, somit
$$\begin{cases} y_n + \sigma A\bar{x} - y_{n+1} \in \sigma\,\partial F^*(y_{n+1}) & \text{mit } \bar{x} = \bar{x}_n \\ x_n - \tau A^T\bar{y} - x_{n+1} \in \tau\,\partial G(x_{n+1}) & \text{mit } \bar{y} = y_{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F^*(y) \ge F^*(y_{n+1}) + \left\langle \frac{y_n - y_{n+1}}{\sigma}, y - y_{n+1}\right\rangle + \langle A\bar{x}, y - y_{n+1}\rangle & \forall y \\ G(x) \ge G(x_{n+1}) + \left\langle \frac{x_n - x_{n+1}}{\tau}, x - x_{n+1}\right\rangle - \langle A^T\bar{y}, x - x_{n+1}\rangle & \forall x \end{cases}$$

Der Chambolle-Pock-Algorithmus III

$|\cdot| \mathrel{\hat{=}} \|\cdot\|_2$

$$\text{Summe} \Rightarrow \frac{|y-y_n|^2}{2\sigma} + \frac{|x-x_n|^2}{2\tau} \geq \underbrace{\left[\langle Ax_{n+1}, y\rangle - F^*(y) + G(x_{n+1})\right] - \left[\langle Ax, y_{n+1}\rangle - F^*(y_{n+1}) + G(x)\right]}_{\text{hat Struktur der primal-dualen Lücke}}$$

$$+ \frac{|y-y_{n+1}|^2}{2\sigma} + \frac{|x-x_{n+1}|^2}{2\tau} + \underbrace{\frac{|y_n-y_{n+1}|^2}{2\sigma} + \frac{|x_n-x_{n+1}|^2}{2\tau}}_{\geq 0}$$

$$+ \underbrace{\langle A(x_{n+1}-\bar{x}), y_{n+1}-y\rangle - \langle A(x_{n+1}-x), y_{n+1}-\bar{y}\rangle}_{=:B}$$

$\bar{y} = y_{n+1}, \ \bar{x} = 2x_n - x_{n-1}$

$$B \overset{\downarrow}{=} \langle A((x_{n+1}-x_n) - (x_n - x_{n-1})), y_{n+1} - y\rangle$$

$$= \langle A(x_{n+1}-x_n), y_{n+1}-y\rangle - \langle A(x_n-x_{n-1}), y_n - y\rangle - \underbrace{\langle A(x_n-x_{n-1}), y_{n+1}-y_n\rangle}$$

$$\leq \|A\|\,|x_n-x_{n-1}|\,|y_{n+1}-y_n| \leq \|A\|\left(\frac{\alpha}{2}|x_n-x_{n-1}|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_{n+1}-y_n|^2\right)$$

$$\underset{\alpha=\sqrt{\sigma/\tau}}{\geq} \langle A(x_{n+1}-x_n), y_{n+1}-y\rangle - \langle A(x_n-x_{n-1}), y_n - y\rangle - \sqrt{\sigma\tau}\,\|A\|\left(\frac{|x_n-x_{n-1}|^2}{2\tau} + \frac{|y_{n+1}-y_n|^2}{2\sigma}\right)$$

$$\text{insgesamt: } \frac{|y-y_n|^2}{2\sigma} + \frac{|x-x_n|^2}{2\tau} \geq \left[\langle Ax_{n+1}, y\rangle - F^*(y) + G(x_{n+1})\right] - \left[\langle Ax, y_{n+1}\rangle - F^*(y_{n+1}) + G(x)\right]$$

$$+ \frac{|y-y_{n+1}|^2}{2\sigma} + \frac{|x-x_{n+1}|^2}{2\tau} + (1-\sqrt{\tau\sigma}\,\|A\|)\frac{|y_n-y_{n+1}|^2}{2\sigma} + \frac{|x_n-x_{n+1}|^2}{2\tau} - \sqrt{\tau\sigma}\,\|A\|\frac{|x_{n-1}-x_n|^2}{2\tau}$$

$$+ \langle A(x_{n+1}-x_n), y_{n+1}-y\rangle - \langle A(x_n-x_{n-1}), y_n - y\rangle$$

Der Chambolle-Pock-Algorithmus IV

Summiere von $n = l$ bis $N-1$:

$$\underbrace{\sum_{n=l+1}^{N}\Big(\big[\langle Ax_n, y\rangle - F^*(y) + G(x_n)\big] - \big[\langle Ax, y_n\rangle - F^*(y_n) + G(x)\big]\Big)}_{C(l)} + \overset{(1-\tau\sigma\|A\|^2)\ \checkmark}{\frac{|y-y_N|^2}{2\sigma}} + \frac{|x-x_N|^2}{2\tau}$$

$$+\underbrace{(1-\sqrt{\sigma\tau}\|A\|)\sum_{n=l+1}^{N}\frac{|y_n-y_{n-1}|^2}{2\sigma} + (1-\sqrt{\sigma\tau}\|A\|)\sum_{n=l+1}^{N-1}\frac{|x_n-x_{n-1}|^2}{2\tau}}_{\geq 0} + \cancel{\frac{|x_N-x_{N-1}|^2}{2\tau}} - \sqrt{\tau\sigma}\|A\|\frac{|x_{l-1}-x_l|^2}{2\tau} - \langle A(x_l-x_{l-1}), y_l-y\rangle$$

$$\leq \frac{|x-x_l|^2}{2\tau} + \frac{|y-y_l|^2}{2\sigma} - \underbrace{\cancel{\langle A(x_N-x_{N-1}), y_N-y\rangle}}$$

$(*)$

$$\leq \|A\|\,|x_N-x_{N-1}|\,|y_N-y| \leq \|A\|\left(\frac{\beta}{2}|x_N-x_{N-1}|^2 + \frac{1}{2\beta}|y_N-y|^2\right) \overset{\beta=\frac{1}{\tau\|A\|}}{\leq} \cancel{\frac{|x_N-x_{N-1}|^2}{2\tau}} + \cancel{\tau\sigma\|A\|^2\frac{|y_N-y|^2}{2\sigma}}$$

- Wähle $(x,y)=(\hat{x},\hat{y})$ $\Rightarrow$ $C(l)\geq 0$; wähle nun $l=0$ $\Rightarrow$ (a)
- Konvexität von F^*, G $\Rightarrow$ $\big[\langle Ax^N, y\rangle - F^*(y) + G(x^N)\big] - \big[\langle Ax, y^N\rangle - F^*(y^N) + G(x)\big] \leq \frac{C(0)}{N}$
  $\leq \frac{1}{N}\left(\frac{|x-x_0|^2}{2\tau} + \frac{|y-y_0|^2}{2\sigma}\right)$ $\Rightarrow$ (b)
- (a) $\Rightarrow$ (x_n, y_n) ist beschränkte Folge $\Rightarrow$ Teilfolge $(x_{n_k}, y_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x^*, y^*)$
- $(*)$ $\Rightarrow$ $|x_n-x_{n-1}|, |y_n-y_{n-1}| \to 0 \Rightarrow (x_{n_k-1}, y_{n_k-1}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x^*, y^*)$
  $\Rightarrow$ (x^*, y^*) ist Fixpunkt des Algorithmus $\Rightarrow$ (x^*, y^*) ist Sattelpunkt
- Wähle $(x,y)=(x^*,y^*)$ $\Rightarrow C(l)\geq 0$; mit $l=n_k$ folgt $(1-\tau\sigma\|A\|^2)\frac{|y^*-y_N|^2}{2\sigma} + \frac{|x^*-x_N|^2}{2\tau} \leq \frac{|x^*-x_{n_k}|^2}{2\sigma} + \frac{|y^*-y_{n_k}|^2}{2\tau} + O(|x_{n_k}-x_{n_k-1}|) \Rightarrow$ (c) $\square$

Struktur von Liniensuch-Verfahren

Im Folgenden nehmen wir $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und beschränkt von unten an.

Def: Eine Abstiegsrichtung für f an x ist ein $p \in \mathbb{R}^n$ mit $Df(x)\,p < 0$.
(Richtung, in die f abnimmt)

Alg. (Liniensuch-Verfahren)

geg.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$

repeat
1) wähle eine Abstiegsrichtung $p_k \in \mathbb{R}^n$
2) wähle eine Schrittweite $\alpha_k > 0$
3) $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
4) $k \leftarrow k+1$

until x_{k+1} minimiert f ausreichend

Schrittweiten-Kontrolle: Armijo-Bedingung

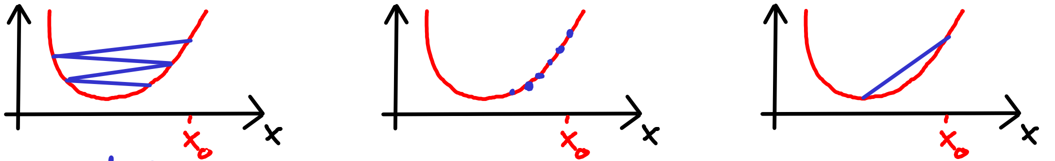
<u>Def</u>: $\alpha_k > 0$ erfüllt die <u>Armijo-Bedingung</u> für $0 < c_1 < 1$, wenn

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \le f(x_k) + c_1 \alpha_k Df(x_k) p_k$$

erwarteter Abstieg!

<u>Kor</u>: Wenn $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $0 < c_1 < 1$, dann existiert eine Schrittweite α, die die Armijo-Bedingung erfüllt.

Bew: Taylors Satz $\Rightarrow$ $f(x+\alpha p) = f(x) + \alpha Df(x)p + o(\alpha) < f(x) + c_1 \alpha Df(x) p$ für α klein genug $\square$



zu große Schritte | zu kleine Schritte | Armijo-Backtracking-Schritt

<u>Alg. (Backtracking, um eine gute Schrittweite zu finden)</u>

$\alpha = 1$

if Armijo-Bedingung erfüllt

  repeat $\alpha \leftarrow 2\alpha$ until Armijo-Bedingung verletzt

while Armijo-Bedingung verletzt

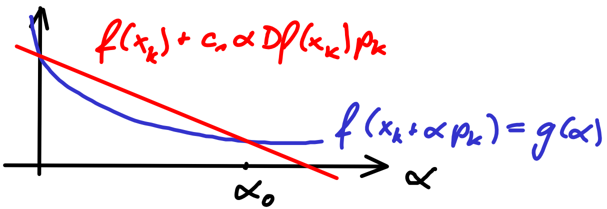
  $\alpha \leftarrow \alpha / 2$

Schrittweiten-Kontrolle: Wolfe-Bedingung

Def: α_k erfüllt die starke Wolfe-Bedingung für $0 < c_1 < c_2 < 1$, wenn α_k die Armijo-Bed. erfüllt und $|Df(x_k + \alpha_k p_k) p_k| \leq -c_2 Df(x_k) p_k$

Thm: Wenn $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ nach unten beschränkt ist, $0 < c_1 < c_2 < 1$, dann existiert ein α_k, das die starke Wolfe-Bedingung erfüllt.

Bew.: Sei $g(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$



- $\alpha_0 := \max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha Df(x_k) p_k\}$
- wenn $g'(\alpha_0) \geq 0$, wähle $\alpha_k = \max\{\alpha \leq \alpha_0 \mid g'(\alpha) = 0\}$

  beachte: Armijo-Bed. ist automatisch erfüllt
- sonst $|Df(x_k + \alpha_0 p_k) p_k| = -g'(\alpha_0) \leq \underbrace{-c_1 g'(0)}_{\text{Steigung der roten Linie}} < -c_2 g'(0) = -c_2 Df(x_k) p_k$ $\square$

Globale Konvergenz

Thm (Zoutendijk): Wenn · $\exists L>0: \|Df(x)-Df(y)\|_2 \leq L\|x-y\|_2$, (Gradient ist Lipschitz)

· $\cos\theta_k = \dfrac{-Df(x_k)p_k}{\|Df(x_k)\|_2\,\|p_k\|_2}$, (Winkel zwischen $-\nabla f(x_k)$ und Suchrichtung p_k)

· α_k erfüllen die starke Wolfe-Bedingung,

dann $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^2\theta_k \|Df(x_k)\|_2^2 < \infty$. (entweder $Df \to 0$ oder Winkel degeneriert)

Bew: 1) Nutze Wolfe-Bedingung & Tatsache, dass Df sich nicht zu schnell ändern kann, um eine untere Schranke an die Schrittweite zu erhalten:

$$\alpha_k L \|p_k\|_2^2 \geq \big(Df(x_k+\alpha_k p_k) - Df(x_k)\big)p_k \geq (c_2-1)Df(x_k)p_k$$

$$\Rightarrow \alpha_k \geq \frac{c_2-1}{L\|p_k\|_2^2} Df(x_k)p_k$$

2) Nutze Armijo-Bedingung, um abzuschätzen wie viel f im schlechtesten Fall abnimmt:

$$\Rightarrow f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + c_1\frac{c_2-1}{L}\frac{(Df(x_k)p_k)^2}{\|p_k\|_2^2} = f(x_k) + c_1\frac{c_2-1}{L}\cos^2\theta_k\|Df(x_k)\|_2^2$$

$$\Rightarrow -\infty < \inf f - f(x_0) \leq f(x_\ell) - f(x_0) = \sum_{k=0}^{\ell-1} f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq c_1\frac{c_2-1}{L}\sum_{k=0}^{\ell-1}\cos^2\theta_k\|Df(x_k)\|_2^2 \quad \square$$

die folgenden Konvergenzraten-Beweise starten von hier

Bem: Wenn Df nur Hölder-stetig mit Exponent β ist, erhält man $\sum_{k=1}^{\infty} \big|\cos\theta_k \|Df(x_k)\|_2\big|^{1+\frac{1}{\beta}} < \infty$ (HA)

$\Rightarrow Df \to 0$ mit langsamerer Konvergenzrate!

Gradientenabstieg, steilster Abstieg, Newton-Verfahren

Def: · Die <u>Gradientenabstiegs-Richtung</u> ist $p_k^g = -\nabla f(x_k)$

· Sei $\|\cdot\|$ eine Norm mit dualer Norm $\|\cdot\|_*$; die <u>steilste Abstiegs-Richtung</u> ist

$$p_k^s = \|\nabla f(x_k)\|_* \operatorname*{argmin}_{\|v\|=1} Df(x_k)v$$

(Gradientenabstieg = steilster Abstieg mit $\|\cdot\|_2$)

(Skalierung so, dass $-Df(x_k)p_k^s = \|\nabla f(x_k)\|_*^2$)

· Der <u>Newton-Schritt</u> ist $p_k^N = -D^2f(x_k)^{-1}\nabla f(x_k)$

Bem: Wenn D^2f pos. definit ist, sind alle obigen Richtungen Abstiegsrichtungen. In der Tat,

$$Df(x_k)p_k^g = -\|\nabla f(x_k)\|_2^2 < 0, \quad Df(x_k)p_k^s = -\|Df(x_k)\|_*^2 < 0, \quad Df(x_k)p_k^N = -\|\nabla f(x_k)\|^2_{D^2f(x_k)^{-1}} < 0.$$

Bem: Das Newton-Verfahren findet das Minimum in einem einzigen Schritt, wenn f quadratisch & $\alpha_k = 1$ sind: $f(x) = \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx$ wird minimiert durch $x^* = -A^{-1}b$, und $x_k + \alpha_k p_k^N = x_k - A^{-1}(Ax_k + b) = x^*$

Kor: Wenn $mI \leq Df^2(x) \leq MI$ (im Sinn quadratischer Formen, d.h. Eigenwerte $\in [m, M]$) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ mit $m, M > 0$ & die α_k die starke Wolfe-Bed. erfüllen, dann gilt $Df(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ für Gradienten-/steilsten Abstieg / Newton-Verfahren.

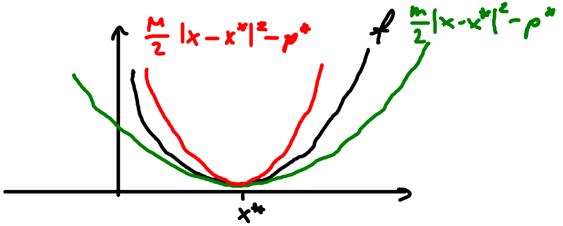
Bew: Folgt aus Zoutendijks Theorem mit $\cos\theta_k = 1$ für Gradientenabstieg, $\cos\theta_k \geq \frac{m}{M}$ für Newton-Verfahren, $\cos\theta_k \geq \frac{c}{C}$ mit $c\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_*$ für steilsten Abstieg. □

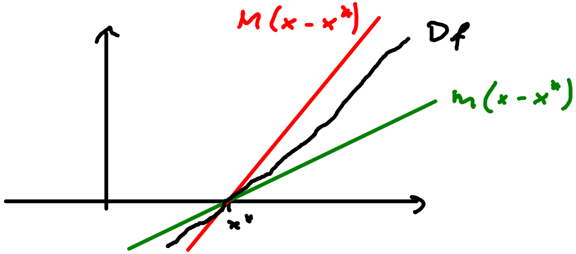
Optimalitäts-Schranken aus dem Gradienten

Konvexe Umgebung von opt. Punkt x^*

<u>Thm</u>: Wenn $m, M > 0$ existieren mit $mI \le D^2 f(x) \le MI$ $\quad \forall x \in U(x^*)$, dann $\forall x \in U(x^*)$

- $\frac{1}{2M}\|Df(x)\|_2^2 \le f(x) - p^* \le \frac{1}{2m}\|Df(x)\|_2^2$
- $\frac{1}{M}\|Df(x)\|_2 \le \|x - x^*\|_2 \le \frac{1}{m}\|Df(x)\|_2$





Bew.: Mit Taylor, $f(y) = f(x) + Df(x)(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T D^2 f(z)(x-y)$ für ein z zwischen x, y

$\Rightarrow f(y) \substack{\le \\ \ge} f(x) + Df(x)(y-x) + \frac{\substack{M \\ m}}{2}\|y-x\|_2^2 \qquad \forall x, y \in U(x^*)$

- minimiere beide Seiten nach y: links $y = x^*$

  rechts $y = \tilde{y} = x - \frac{1}{\substack{M \\ m}}\nabla f(x)$

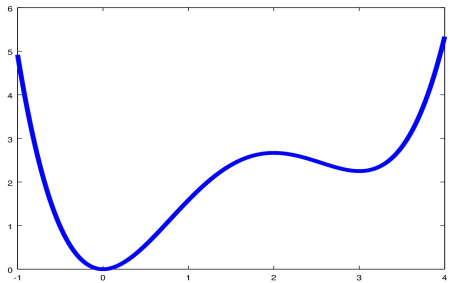
$\Rightarrow p^* = f(x^*) \substack{\le \\ \ge} f(x) - \frac{1}{2\substack{M \\ m}}\|Df(x)\|_2^2$

- Wie oben, $f(x) \substack{\le \\ \ge} f(x^*) + Df(x^*) + \frac{\substack{M \\ m}}{2}\|x - x^*\|_2^2 = p^* + \frac{\substack{M \\ m}}{2}\|x - x^*\|_2^2$

$\Rightarrow \|x - x^*\|_2 \substack{\ge \\ \le} \frac{2}{\substack{M \\ m}}(f(x) - p^*) \substack{\ge \\ \le} \frac{1}{\substack{M^2 \\ m^2}}\|Df(x)\|_2^2$ $\quad \square$

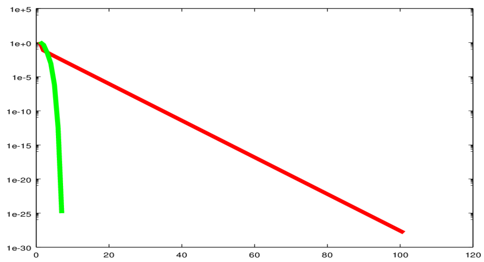
Experimentelle Konvergenzrate

```
octave:1> f = @(x) x.^4/4 - 5*x.^3/3 + 3*x.^2;
octave:2> df = @(x) x^3 - 5*x^2 + 6*x; % = x*(x-2)*(x-3)
octave:3> d2f = @(x) 3*x^2 - 10*x + 6;
octave:4> fun = @(x) deal(f(x),df(x),d2f(x));
```




```
octave:5> x = -1:.01:4;
octave:6> plot(x,f(x),'Linewidth',5);
```

```
octave:7> x0 = 1.3;
octave:8> maxIter = 100;
octave:9> [x,iterSteepest] = descendSteepest( fun, x0, maxIter, false );
octave:10> [x,iterNewton] = newtonMethod( fun, x0, maxIter, 1e-26, false );
octave:11> semilogy(1:length(iterSteepest),abs(iterSteepest),'r','Linewidth',5,...
>                   1:length(iterNewton),  abs(iterNewton),  'g','Linewidth',5);
```



Konvergenzrate Gradienten-/steilster Abstieg

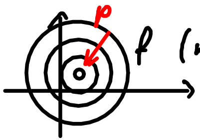
$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\gamma}\|\cdot\| \geq \|\cdot\|_2 \geq \gamma \|\cdot\|_* \\ \frac{1}{\tilde\gamma}\|\cdot\|_* \geq \|\cdot\|_2 \geq \tilde\gamma \|\cdot\| \end{array}\right\}$,

__Thm:__ Sei $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$, $mI \leq D^2 f(x) \leq MI \;\; \forall x \in S$, $m, M > 0$,

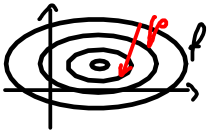
x_k seien die Schritte des steilsten Abstiegs mit Backtracking für $c_1 \in (0, \frac{1}{2})$. Dann gilt

$$(f(x_k) - p^*) \leq \delta^k (f(x_0) - p^*) \qquad \text{für } \delta = 1 - 2m c_1 \tilde\gamma^2 \min\{1, \tfrac{\gamma^2}{2M}\} < 1$$

↖ lineare Konvergenz ↖ hängt ab von Konditionszahl $\frac{M}{m}$ von $D^2 f$!



f $(m = M)$



f ($m \ll M$ schlechte Konvergenzrate)

Bew.: $f(x_k + \alpha \underset{\hat{=} p_k^s}{p_k}) \leq f(x_k) + \alpha Df(x_k) p_k + \frac{M}{2}\alpha^2 \underbrace{\|p_k\|_2^2}_{\leq \|p_k\|^2/\gamma^2 = \|\nabla f(x_k)\|_*^2/\gamma^2 = -Df(x_k)p_k/\gamma^2} \leq f(x_k) + \alpha\left(1 - \frac{M}{2\gamma^2}\alpha\right) Df(x_k) p_k$

$\Rightarrow$ jedes $\alpha \in \left(0, \frac{2\gamma^2}{M}(1-c_1)\right) \supset \left(0, \frac{\gamma^2}{M}\right)$ erfüllt die Armijo-Bed. $\Rightarrow \alpha_k \geq \min\{1, \frac{\gamma^2}{2M}\}$

$\cdot\; f(x_{k+1}) = f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k Df(x_k) p_k \leq f(x_k) - c_1 \min\{1, \frac{\gamma^2}{2M}\} \|\nabla f(x_k)\|_*^2$

$\leq f(x_k) - c_1 \tilde\gamma^2 \min\{1, \frac{\gamma^2}{2M}\} \underbrace{\|\nabla f(x_k)\|_2^2}_{\geq 2m(f(x_k) - p^*)}$

$\Rightarrow f(x_{k+1}) - p^* \leq f(x_k) - p^* - 2m\, c_1 \tilde\gamma^2 \min\{1, \gamma^2/2M\} (f(x_k) - p^*) = \delta (f(x_k) - p^*)$ $\square$

- Was bedeutet dies für $\|Df(x_k)\|_2$, $\|x_k - x^*\|_2$?
- Welche Rate erhält man aus Zoutendijks Theorem?

Akzeptanz des Newton-Schritts

warum wichtig?

Thm: Wenn · $D^2 f$ stetig · $mI \le D^2 f(x) \le MI \ \forall x;\ m,M>0$ · $c_1 < \frac{1}{2}$ · $\lim_{k\to\infty} \|p_k\| = 0$ · $\lim_{k\to\infty} \frac{\|p_k - p_k^N\|}{\|p_k\|} = 0$,

dann erfüllt $\alpha_k = 1$ für k groß genug die starke Wolfe-Bedingung.

Bew: 1) Armijo-Bed. ist erfüllt für k groß genug:

· Taylors Theorem: $f(x_k + p_k) = f(x_k) + Df(x_k)p_k + \frac{1}{2} p_k^T D^2 f(x_k + q_k) p_k$ für ein $q_k \in [0, p_k]$

· $f(x_k+p_k) - f(x_k) - \frac{1}{2} Df(x_k)p_k = \frac{1}{2}\left[Df(x_k)p_k + p_k^T D^2 f(x_k + q_k) p_k\right]$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\left(Df(x_k)p_k + p_k^T D^2 f(x_k) p_k^N\right)}_{=0} + \underbrace{p_k^T D^2 f(x_k)\left(p_k - p_k^N\right)}_{= M\ o(\|p_k\|_2^2)} + \underbrace{p_k^T \left(D^2 f(x_k + q_k) - D^2 f(x_k)\right) p_k}_{= o(\|p_k\|_2^2)}\Big] = o\left[\left(c_1 - \tfrac{1}{2}\right) Df(x_k)p_k\right]$$

2) $$\frac{Df(x_k)p_k}{\|p_k\|_2^2} + m \le \frac{Df(x_k)p_k}{\|p_k\|_2^2} + \frac{p_k^T D^2 f(x_k) p_k}{\|p_k\|_2^2} = \frac{p_k^T D^2 f(x_k)(p_k - p_k^N)}{\|p_k\|_2^2} \le M \frac{\|p_k - p_k^N\|_2}{\|p_k\|_2} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ für k groß genug ist $-Df(x_k)p_k \ge \frac{m}{2} \|p_k\|_2^2$

3) starke Wolfe-Bed. ist erfüllt für k groß genug:

$$|Df(x_k + p_k)p_k| = \Big|\underbrace{Df(x_k)p_k + p_k^T D^2 f(x_k) p_k}_{= p_k^T D^2 f(x_k)(p_k - p_k^N) = M o(\|p_k\|_2^2)} + \underbrace{\int_0^1 p_k^T \left(D^2 f(x_k + t p_k) - D^2 f(x_k)\right) p_k \, dt}_{= o(\|p_k\|_2^2)}\Big| ,$$

während $-c_2 Df(x_k)p_k \ge c_2 \frac{m}{2} \|p_k\|_2^2$ $\square$

Konvergenzrate Newton-Verfahren

Thm: Sei D^2f Lipschitz-stetig mit Konstante L, $m, M > 0$, $mI \le D^2f(x) \le MI \; \forall x$, $c_1 < \frac{1}{2}$, $p_k = p_k^N$, $\alpha_k = 1$ sobald möglich. Dann gilt $\limsup_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|_2}{\|x_k - x^*\|_2^2} \le \frac{L}{m}$.

quadratische Konvergenz

Bew:
- Zoutendijk $\Rightarrow \|Df(x_k)\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_k - x^*\|_2 \to 0$ & $p_k \to 0$
- aus vorherigem Thm folgt $\alpha_k = 1$ für k groß genug, d.h. $x_{k+1} = x_k + p_k$
- $D^2f(x_k)(x_{k+1} - x^*) = D^2f(x_k)(p_k - (x^* - x_k)) = Df(x^*) - Df(x_k) - D^2f(x_k)(x^* - x_k)$
$$= \int_0^1 \left(D^2f(x_k + t(x^* - x_k)) - D^2f(x_k)\right)(x^* - x_k)\,dt$$
- nimm Norm auf beiden Seiten:
$$m\|x_{k+1} - x^*\|_2 \le \|D^2f(x_k)(x_{k+1} - x^*)\|_2 \le \left\|\int_0^1 (D^2f(x_k + t(x^* - x_k)) - D^2f(x_k))(x^* - x_k)\,dt\right\|_2 \le \frac{L}{2}\|x^* - x_k\|_2^2 \quad \square$$

Bem:
- Wenn $mI \le D^2f(x^*) \le MI$, dann gelten wegen Stetigkeit analoge Schranken in einer Umgebung.
- Wenn das Verfahren zu einem Zeitpunkt diese Umgebung erreicht, erhält man quadratische Konvergenz.
- Wenn D^2f nur Hölder-stetig mit Exponent $\alpha > 0$ ist?
- Das Newton-Verfahren ist invariant unter einer Koordinatentransformation $x \mapsto Ax$ (prüfen!), jedoch nicht unsere Konvergenzratenanalyse $\Rightarrow$ eigentlich braucht man nur $\|(D^2f(x)^{-1}D^2f(x + t(x^* - x)) - I_d)(x^* - x)\| \le C\|x^* - x\|^2$, d.h. keine separate Lipschitz- & strikte Konvexitätsbedingung (Bezug zu „Selbstkonkordanz")

Komplexität des Newton-Verfahrens

Thm: Es gelten die gleichen Bedingungen wie zuvor. $\underbrace{\|Df(x_k)\|_2 < \min\left(\tfrac{1}{2}-c_1, \tfrac{c_2}{2}\right)\tfrac{m^2}{L}}_{\text{impliziert } \|x_k - x^*\|_2 < \min\left(\frac{1}{2}-c_1, \frac{c_2}{2}\right)\frac{m}{L}}$ impliziert $\|x_{k+1}-x^*\|_2 \le \frac{L}{m}\|x_k - x^*\|_2^2$.

Bew: selber Beweis, nur noch zu zeigen, dass $\alpha_k = 1$; hierfür wiederhole früheren Beweis & benutze

$$p_k^{N^T}\left(D^2f(x_k+q_k) - D^2f(x_k)\right)p_k^N \le L\|p_k^N\|_2^3 \le L\frac{\|Df(x_k)\|_2}{m}\|p_k^N\|_2^2 \le \begin{cases}\left(\frac{1}{2}-c_1\right)m\|p_k^N\|_2^2 \le \left(c_1-\frac{1}{2}\right)Df(x_k)p_k^N \\ \frac{c_2}{2}m\|p_k^N\|_2^2\end{cases}$$ □

Thm: Es gelten die gleichen Bedingungen wie zuvor. α_k werde maximal bis auf einen Faktor $\beta \in (0,1)$ gewählt.

Für jedes $\eta > 0$ existiert ein $\gamma > 0$ s.d. $\|Df(x_k)\|_2 \ge \eta$ impliziert $f(x_{k+1}) \le f(x_k) - \gamma$.

Bew: · $-Df(x_k)p_k^N = p_k^{N^T}D^2f(x_k)p_k^N \ge m\|p_k^N\|_2^2$

· $f(x_k+\alpha p_k^N) = f(x_k) + \alpha Df(x_k)p_k^N + \frac{M}{2}\alpha^2\|p_k^N\|^2 \le f(x_k) + \alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\frac{M}{m}\right)Df(x_k)p_k^N$

$\Rightarrow \hat\alpha = 2\frac{m}{M}(1-c_1)$ erfüllt Armijo-Bedingung

$\gamma := \frac{\beta\hat\alpha c_1 \eta^2}{M}$

· Fall 1 ($\hat\alpha$ erfüllt Wolfe-Bed.): $\alpha_k \ge \beta\hat\alpha \Rightarrow f(x_k+\alpha_k p_k^N) - f(x_k) \le \beta\hat\alpha c_1 \underbrace{Df(x_k)p_k^N}_{\le -\frac{1}{M}\eta^2} \le -\gamma$

Fall 2 ($Df(x_k+\hat\alpha p_k^N)p_k^N$ zu negativ): $\alpha_k \ge \hat\alpha \ge \beta\hat\alpha$, ——— " ———

Fall 3 ($Df(x_k+\hat\alpha p_k^N)p_k^N$ zu positiv): $f(x_k+\alpha_k p_k^N) - f(x_k) \le f(x_k+\hat\alpha p_k^N) - f(x_k) \le -\gamma$. □

Kor: Das Newton-Verfahren erreicht $\|x_k - x^*\|_2 < \varepsilon$ nach $\frac{f(x_0)-p^*}{\gamma} + \log_2\left(\frac{\log\varepsilon}{\log\min\left(\frac{1}{2}-c_1, \frac{c_2}{2}\right)}\right)$ Iterationen.

Idea of interior point methods

min $f_0(x)$ s.t. $f_1(x), \dots, f_m(x) \le 0$, $Ax = b$, $f_i \in C^2$, convex, $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, rank $A = p < n$ (P)

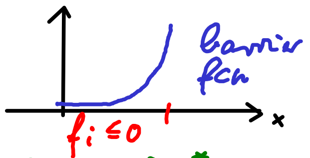
<u>assume</u>: · optimal point x^* exists

· Slater's condition (strict feasibility) satisfied

$\Rightarrow$ strong duality, KKT conditions fulfilled

$$\left.\begin{aligned} &A x^* = b \, , \; f_i(x^*) \le 0 \, , \; \mu_i^* \ge 0 \, , \; \mu_i^* f_i(x^*) = 0 \, , \; i = 1, \dots, m \\ &\nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla f_i(x^*) + A^T \lambda^* = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (O)$$

<u>idea</u>: · Solve (P) or (O) by applying Newton's method to a sequence of modifications of (P) or (O) that only have equality constraints.



· E.g., replace $f_i(x^*) \le 0$ by adding a "barrier function" to f_0

· interior point methods produce a sequence x_k with $Ax_k = b$, $f_i(x_k) < 0$, $x_i \to x^*$

Barrier methods: barrier functions

(P) $\Leftrightarrow \min_x f_0(x) + \sum_{i=1}^m \chi_-(f_i(x))$ s.t. $Ax = b$ for $\chi_-(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s \le 0 \\ \infty & \text{else} \end{cases}$

replace $\chi_-(u)$ by $I_t(u) = -\frac{1}{t}\ln(-u)$, $\operatorname{dom} I_t = \{u \in \mathbb{R} \mid u < 0\}$

<u>Thm</u>: For $t > 0$ • I_t is convex, differentiable, non-decreasing

• $I_t(u) \xrightarrow[u \uparrow 0]{} \infty$, $I_t(u) = \infty$ for $u > 0$ $\square$

<u>Def</u>: • The <u>logarithmic barrier function</u> ϕ to (P) is given by

$$\phi(x) = -\sum_{i=1}^m \ln(-f_i(x)), \quad \operatorname{dom}\phi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x), \dots, f_m(x) < 0\}$$

$$\nabla\phi(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{1}{f_i(x)} \nabla f_i(x), \quad D^2\phi(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{f_i^2(x)} \nabla f_i(x) \nabla f_i(x)^T - \frac{1}{f_i(x)} D^2 f_i(x)$$

ϕ is convex.

• The <u>barrier problem</u> to (P) is given by

$$\min_x \; t f_0(x) + \phi(x) \quad \text{s.t. } Ax = b \qquad (P_t)$$

• The <u>central path</u> is $\{x^*(t) \mid t > 0\}$, where $x^*(t)$ is the optimal point of (P_t); it satisfies $\exists \lambda \in \mathbb{R}^p$: $0 = t\nabla f_0 + \nabla\phi + A^T\lambda$

Barrier methods: algorithm

Thm: Let (x^*, λ^*) be optimal primal dual pair for (P_t), then (μ^*, λ^*) is dually feasible for $\mu_i^* = \frac{-1}{t f_i(x^*)}$, and $f_0(x^*) - g(\mu^*, \lambda^*) = \frac{m}{t}$, i.e. x^* and (μ^*, λ^*) are $\frac{m}{t}$-suboptimal.

proof: • $\mu_i^* > 0$ due to $f_i(x^*) < 0$

• optimality condition for (P_t): $0 = \nabla f_0 + \frac{\nabla \phi}{t} + A^T \lambda^* = \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla f_i(x^*) + A^T \lambda^*$

$\Rightarrow x^* = \operatorname{argmin}_x \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* f_i(x) + \lambda^{*T}(Ax - b) \right) = \operatorname{argmin}_x L(x, (\mu^*, \lambda^*))$

• $p^* \geq g(\mu^*, \lambda^*) = \min_x L(x, (\mu^*, \lambda^*)) = L(x^*, (\mu^*, \lambda^*)) = f_0(x^*) - \frac{1}{t} \sum_{i=1}^m \frac{f_i(x^*)}{f_i(x^*)}$ $\square$

Alg (barrier method): given: strictly feasible x, $t = t_0 > 0$, $\beta > 1$, tolerance $\varepsilon > 0$

iterate until $\frac{m}{t} < \varepsilon$:

step 1: solve (P_t) via Newton's method with initial guess x

step 2: $x \leftarrow x^*(t)$, $t \leftarrow \beta t$

Rem: The previous theorem implies convergence $f_0(x^*(t)) \to p^*$.

Barrier methods: complexity

usually not fulfilled for barrier functions but can be relaxed to a "self-concordance" assumption

Thm: Let $D^2 f_0 + \frac{1}{t} D^2\phi$ Lipschitz with constant L, $\tilde{m} I \leq D^2 f_0(x) + \frac{1}{t} D^2\phi \leq M I$ for some $\tilde{m}, M > 0$ and all $t > 0$, then the barrier method reaches an x with $\|x - x^*\|_2 < \varepsilon$ after $N = \frac{\log \frac{m}{t_0 \varepsilon}}{\log \beta} \left(\frac{m(\beta - 1 - \log\beta)}{\gamma} + C \log_2 \log \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right)$ steps for some $C, \gamma > 0$, where $\tilde{\varepsilon}$ is the accuracy of solving (P_t).

linear convergence

proof: • every iteration takes $\frac{f(x) - p^*}{\gamma} + C \log_2 \log \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}$ Newton steps starting from x

where $f = t f_0 + \phi$, $x = x^*(t/\beta)$, $x^+ = x^*(t)$, $p^* = f(x^+)$

• $t f_0(x) + \phi(x) - t f_0(x^+) - \phi(x^+) = t f_0(x) - t f_0(x^+) + \sum_{i=1}^m \left(-\log(-f_i(x)) + \log(-f_i(x^+)) \right)$

$$= t f_0(x) - t f_0(x^+) + \sum_{i=1}^m \underbrace{\log(-t \mu_i f_i(x^+))}_{\leq -t\mu_i f_i(x^+) - 1} - m \log\beta$$

$\mu_i := \frac{\beta}{-t f_i(x)}$ (multiplier from previous iteration)

$$\leq t f_0(x) - t \underbrace{\left(f_0(x^+) + \sum_{i=1}^m \mu_i f_i(x^+) + \lambda^T \underbrace{(Ax^+ - b)}_{0} \right)}_{\geq g(\mu, \lambda) = f_0(x) - \frac{m}{t}\beta} - m - m\log\beta \leq m(\beta - 1 - \log\beta)$$

(similar to duality gap on previous slide!)

$\Rightarrow$ need less than $\frac{m(\beta - 1 - \log\beta)}{\gamma} + C \log_2 \log \frac{1}{\tilde{\varepsilon}}$ Newton steps

• in total $\log \frac{m}{t_0 \varepsilon} / \log\beta$ outer iterations $\square$

Bestrafungs-Methode

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x)$ s.d. $c_I(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \leq 0$ (P)

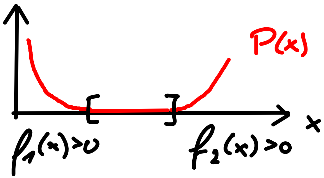
ersetze eventuelle Gleichungs-NB $g_i(x) = 0$ durch $g_i(x) \leq 0$ & $-g_i(x) \leq 0$

Def: Eine Straffunktion für die Nebenbedingungen $f_1(x), \dots, f_m(x) \leq 0$ ist eine Funktion $P(x) = \gamma(c_I^+(x))$ mit $c_I^+(x) = (\max\{0, f_1(x)\}, \dots, \max\{0, f_m(x)\})$ und $\gamma : [0, \infty)^m \to [0, \infty)$ sodass

$$\gamma(0) = 0, \quad \gamma(p) > 0 \text{ für } p \neq 0, \quad \gamma \text{ stetig}$$

Bsp: $\cdot\ \gamma(p) = \frac{1}{2} p^T \Gamma p$ für ein positiv definites $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$\cdot$ Fall $\Gamma = I$ liefert $P(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (\max\{0, f_i(x)\})^2$



Alg (Bestrafungsmethode): geg: $0 < c_1 < c_2 < \dots$, $\lim_{k \to \infty} c_k = \infty$

for $k = 1, 2, \dots$

$$x_k = \arg\min_x q(c_k, x) = \arg\min_x f_0(x) + c_k P(x)$$

Wir wollen annehmen, dass eine Lösung x_k in jedem Schritt k existiert.

Bestrafungs-Methode: Konvergenz

<u>Thm</u>: Es gilt $q(c_k, x_k) \le q(c_{k+1}, x_{k+1})$, $\quad P(x_k) \ge P(x_{k+1})$, $\quad f_0(x_k) \le f_0(x_{k+1})$.

Bew.: $q(c_{k+1}, x_{k+1}) = f_0(x_{k+1}) + c_{k+1} P(x_{k+1}) \ge f_0(x_{k+1}) + c_k P(x_{k+1}) \ge f_0(x_k) + c_k P(x_k) = q(c_k, x_k)$

· $\boxed{f_0(x_k) + c_k P(x_k) \le f_0(x_{k+1}) + c_k P(x_{k+1})} + \boxed{f_0(x_{k+1}) + c_{k+1} P(x_{k+1}) \le f_0(x_k) + c_{k+1} P(x_k)} = \boxed{(c_{k+1} - c_k) P(x_{k+1}) \le (c_{k+1} - c_k) P(x_k)}$

· $f_0(x_{k+1}) + c_k P(x_{k+1}) \ge f_0(x_k) + c_k P(x_k) \ge f_0(x_k) + c_k P(x_{k+1}) \Rightarrow f_0(x_{k+1}) \ge f_0(x_k)$ $\square$

<u>Thm</u>: x^* löse (P), dann gilt $f_0(x^*) \ge q(c_k, x_k) \ge f_0(x_k)$.

Bew: $f_0(x^*) = f_0(x^*) + c_k P(x^*) \ge f_0(x_k) + c_k P(x_k) \ge f_0(x_k)$ $\square$

<u>Thm</u>: $x_1, x_2, \dots$ werde generiert durch die Bestrafungsmethode. Jeder Häufungspunkt löst (P).

Bew: · Sei $K \subset \mathbb{N}$ Indizes einer Teilfolge mit $\lim_{k \in K} x_k = x$ (somit $\lim_{k \in K} f_0(x_k) = f_0(x)$)

· $q(c_k, x_k)$ ist monoton & beschränkt durch $f_0(x^*)$, somit $\lim_{k \in K} q(c_k, x_k) = q^* \le f_0(x^*)$

· $\lim_{k \in K} c_k P(x_k) = \lim_{k \in K} q(c_k, x_k) - f_0(x_k) = q^* - f_0(x) \Rightarrow P(x) = \lim_{k \in K} P(x_k) = 0 \Rightarrow x$ ist zulässig

· $f_0(x) = \lim_{k \in K} f_0(x_k) \le f_0(x^*)$ nach vorherigem Thm $\Rightarrow x$ ist optimal $\square$

Aktive-Mengen-Methode

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) \quad \text{s.d.} \quad f_1(x),\dots,f_m(x)\le 0,\; g_1(x),\dots,g_p(x)=0 \qquad (P)$$

<u>Def</u>: Gegeben den optimalen Punkt $x^*\in\mathbb{R}^n$, ist die <u>aktive Menge</u> definiert als $A=\{i\in\{1,\dots,m\} \mid f_i(x^*)=0\}$.

Wäre A bekannt, würde (P) reduziert auf ein Problem mit Gleichungsnebenbedingungen.

Aktive-Mengen-Methoden raten & aktualisieren A (die aktuelle Vermutung heißt „Arbeitsmenge" W)

<u>Alg (Aktive-Mengen-Methode)</u>: geg: $f_0,\dots,f_m,\ g_1,\dots,g_p,\ W\subset\{1,\dots,m\}$

repeat

1) minimiere $f_0(x)$ s.d. $f_i(x)=g_j(x)=0 \quad \forall j\in\{1,\dots,p\},\ i\in W \qquad (P_W)$

wenn $\underbrace{f_i(x)>0}_{\text{Nebenbedingung verletzt}}$ für ein $i\notin W$, füge i zu W hinzu und wiederhole Schritt 1)

2) aktualisiere Arbeitsmenge: $W=\{j\in\{1,\dots,m\} \mid \overbrace{f_j(x)=0 \;\&\; \mu_j\ge 0}^{\text{Ungl.-Nebenbedingung ist aktiv}}\}$

Lagrange-Multiplikator für NB $f_j=0$ (zu μ_j)

until W ändert sich nicht

Aktive-Mengen-Methode: Konvergenz

Bem: · Schritt 1) kann jede Methode für Optimierung unter Gleichungs-Nebenbedingungen nutzen.

· Wenn W sich nicht ändert, dann gibt es $\mu \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}^p$ mit

$$0 = Df_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i Df_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j Dg_j(x), \quad g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0,$$

$$f_i(x) < 0, \ \mu_i = 0, \ i \notin W, \quad f_i(x) = 0, \ \mu_i \geq 0, \ i \in W,$$

d.h. $W = A$ und x erfüllt die KKT-Bedingungen.

Thm: Angenommen, für jedes $W \subset \{1, \dots, m\}$ habe (P_W) eine eindeutige nichtdegenerierte Lösung (d.h. $\mu_i \neq 0 \ \forall i \in W$). Dann konvergiert die Aktive-Mengen-Methode gegen ein Optimum von (P).

Bew: Nachdem die Lösung für eine Arbeitsmenge W gefunden wurde, sinkt für die nächste Arbeitsmenge der Funktionswert im Optimum von (P_W) $\Rightarrow$ man kann nie zu einer alten Arbeitsmenge zurückkehren. Prozess muss mit $W = A$ terminieren, da es nur endlich viele Arbeitsmengen gibt. □

Bem: · Viele Optimierungen mit falschen W nötig.

· Um W zu aktualisieren, muss im Prinzip (P_W) exakt gelöst werden.

· In der Praxis stoppt man Optimierung von (P_W) vorzeitig (mithilfe von Heuristiken), aber Konvergenz unklar.

Man könnte W unendlich oft ändern.

Lokale Konvexität

$f_0, \dots, f_m, g_1, \dots, g_p \in C^2$

$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x)$ s.d. $c_E(x) = (g_1, \dots, g_p)^T(x) = 0$, $c_I(x) = (f_1, \dots, f_m)^T(x) \leq 0$ (P)

Sei x^* ein lokales Minimum von (P) & es sei regulär bzgl. der Nebenbedingungen.

- $\exists\, \lambda^* \in \mathbb{R}^p, \mu^* \in [0,\infty)^m$: $Df_0(x^*) + \lambda^{*T} Dc_E(x^*) + \mu^{*T} Dc_I(x^*) = 0$, $\mu_i^* f_i(x^*) = 0$, und
- $L_{xx}(x^*, \mu^*, \lambda^*) = D^2 f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* D^2 g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i^* D^2 f_i(x^*)$ ist positiv semi-definit auf dem Tangentialraum $T_{x^*}S$ an die aktiven Nebenbedingungen (d.h. $c_E(x) = 0$ & $f_i(x) = 0$ für $i \in A = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i(x^*) = 0\}$)

Def: Die Bedingung „$L_{xx}(x^*, \mu^*, \lambda^*)$ ist positiv definit auf $\mathbb{R}^n$" (C)

heißt lokale Konvexitätsannahme.

Thm: Unter (C) ist x^* ein lokales Minimum des Problems ohne Nebenbedingungen $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) + \lambda^{*T} c_E(x) + \mu^{*T} c_I(x)$.

Außerdem hat $\underbrace{f_0(x) + \lambda^T c_E(x) + \mu^T c_I(x)}_{L(x,\mu,\lambda)}$ für jedes (μ, λ) in einer Umgebung von (μ^*, λ^*) mit $\mu_i = 0$ für $i \notin A$ ein lokales Minimum x nahe bei x^*.

Bew: x^* erfüllt die 2. Ordnung hinreichende Optimalitätsbedingung.

$\cdot\ L_{xx}(x^*, \mu^*, \lambda^*)$ pos. def. $\xRightarrow{\text{impl. Funktionenthm.}}$ $L_x(x, \mu, \lambda) = 0$ hat eine lokale, differenzierbare Lsg. $x(\mu, \lambda)$

außerdem ist $L_{xx}(x, \mu, \lambda)$ pos. def. $\Rightarrow$ 2. Ordnung hinreichende Opt.-Bed. ist erfüllt. $\square$

Lokale Dualität

(wird zu globaler Dualität für konvexe Probleme)

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Nebenbedingungen aktiv sind (sonst ignoriere inaktive NB).

Def: Die <u>(lokale) duale Funktion</u> ist definiert für (μ,λ) nahe (μ^*,λ^*) als $g(\mu,\lambda) = \min_{x \text{ nahe } x^*} L(x,\mu,\lambda)$.

Unter (C) ist dies wohldefiniert. Den Minimierer bezeichnen wir mit $x(\mu,\lambda)$.

Thm: $Dg(\mu,\lambda) = \left(c_I(x(\mu,\lambda))^T \quad c_E(x(\mu,\lambda))^T \right)$

$$D^2 g(\mu,\lambda) = -\begin{pmatrix} Dc_I \\ Dc_E \end{pmatrix} L_{xx}(x(\mu,\lambda),\mu,\lambda)^{-1} \left(\nabla c_I \quad \nabla c_E \right)$$ ausgewertet an $x = x(\mu,\lambda)$.

Bew: Kürze ab $\bar{x} = x(\mu,\lambda)$, dann ist $g(\mu,\lambda) = f_0(\bar{x}) + \mu^T c_I(\bar{x}) + \lambda^T c_E(\bar{x}) = L(\bar{x},\mu,\lambda)$

$$\Rightarrow Dg(\mu,\lambda) = \overbrace{L_x(\bar{x},\mu,\lambda)}^{=0} D_{(\mu,\lambda)}\bar{x} + \left(c_I(\bar{x})^T \quad c_E(\bar{x})^T \right) = \left(c_I(\bar{x})^T \quad c_E(\bar{x})^T \right)$$

$$\Rightarrow D^2 g(\mu,\lambda) = \begin{pmatrix} Dc_I(\bar{x}) \\ Dc_E(\bar{x}) \end{pmatrix} D_{(\mu,\lambda)}\bar{x}$$

löse nach $D_{(\mu,\lambda)}\bar{x}$ auf und setze ein

Nun differenziere $0 = L_x(\bar{x},\mu,\lambda)$ nach (μ,λ): $0 = L_{xx}(\bar{x},\mu,\lambda) D_{(\mu,\lambda)}\bar{x} + \left(\nabla c_I(\bar{x}) \quad \nabla c_E(\bar{x}) \right)$ □

Thm: (lokale Dualität) Sei x^* regulär & lokal optimal für (P) mit Lagrange-Multiplikatoren (μ^*,λ^*). Unter (C) hat das duale Problem $\max_{(\mu,\lambda)\in\mathbb{R}^{m\times p},\, \mu\geq 0} g(\mu,\lambda)$ die lokale Lösung (μ^*,λ^*) mit $g(\mu^*,\lambda^*) = f_0(x^*)$

starke Dualität

Bew: Nach oben Gezeigtem ist $x(\mu^*,\lambda^*) = x^*$ & $Dg(\mu^*,\lambda^*) = \left(c_I(x^*)^T \quad c_E(x^*)^T \right) = 0$ & $D^2 g(\mu^*,\lambda^*)$ ist neg. def.

$\Rightarrow (\mu^*,\lambda^*)$ ist lokales Maximum von g mit $g(\mu^*,\lambda^*) = \min_{x \text{ nahe } x^*} f_0(x) + \mu^{*T} c_I(x) + \lambda^{*T} c_E(x) = f_0(x^*)$ □

Duale Probleme und Straffunktionen

- Steilster Abstieg für (P) in x für feste (μ^*, λ^*) hat eine Konvergenzrate, die abhängt von der Konditionszahl κ von $L_{xx}(x^*, \mu^*, \lambda^*)$ eingeschränkt auf den Tangentialraum $T_{x^*}S$ an die aktiven Nebenbedingungen.
- Steilster Anstieg für das duale Problem in (μ, λ) hat eine Konvergenzrate, die abhängt von $\kappa(D^2 g(\mu^*, \lambda^*))$ mit $D^2 g(\mu^*, \lambda^*) = -\begin{pmatrix} Dc_I \\ Dc_E \end{pmatrix} L_{xx}^{-1} (\nabla c_I \ \nabla c_E)$ an (x^*, μ^*, λ^*), eine Restriktion von L_{xx}^{-1} auf $T_{x^*}S^\perp$!

Problem: $L_{xx}(x^*, \mu^*, \lambda^*)$ ist im Allg. nicht pos. definit $\Rightarrow$ lokale Dualität ist nicht anwendbar!

- Konvergenzrate des steilsten Abstiegs für ein Subproblem in der Bestrafungsmethode hängt von der Konditionszahl von $D^2 q(c_k, x_k)$ ab, z.B. für $P(x_k) = \frac{1}{2}\|c_E(x_k)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|c_I^+(x_k)\|_2^2$ ($c_I^+ = \max\{0, c_I\}$)

$$D^2 q(c_k, x_k) = D^2 f_0(x_k) + c_k \left[\sum_{i=1}^{p} q_i(x_k) D^2 q_i(x_k) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) D^2 f_i(x_k) + (\nabla c_I^+(x_k) \ \ \nabla c_E(x_k)) \begin{pmatrix} D c_I^+(x_k) \\ D c_E(x_k) \end{pmatrix} \right]$$

$$= L_{xx}(x_k, \mu_k, \lambda_k) + c_k (\nabla c_I^+(x_k) \ \ \nabla c_E(x_k)) \begin{pmatrix} D c_I^+(x_k) \\ D c_E^+(x_k) \end{pmatrix}$$

für $(\mu_k, \lambda_k) = c_k(c_I^+(x_k), c_E(x_k))$

Problem: Wenn $c_k \to \infty$, wird die Konditionszahl beliebig schlecht (größter Eigenwert wächst wie c_k, kleinster Eigenwert bleibt ungefähr konstant).

Wenn Newton-Verfahren genutzt wird, dann hängt stattdessen die Effizienz der Lösung der Newton-Gleichungen von der Konditionszahl ab.

Augmentierte Lagrange-Methode: Motivation mittels Dualität

für jedes $c \in [0,\infty)$!

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) \text{ s.d. } c_E(x)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) + \frac{c}{2}\|c_E(x)\|_2^2 \text{ s.d. } c_E(x)=0$$

Lagrange-Funktion der ursprünglichen Formulierung

- Lagrange-Funktion der neuen Formulierung ist $L(x,\lambda) + \frac{c}{2}\|c_E(x)\|_2^2$.
- Man hat die gleichen 1. Ordnung-Opt.-Bed. & Lagrange-Multiplikatoren λ^*, aber die Hessesche am Optimum ist $L_{xx}(x^*,\lambda^*) + c\,\nabla c_E(x^*)\nabla c_E(x^*)^T \Rightarrow$ pos. def. für c groß genug!

  $\Rightarrow$ duale Methode ist nun anwendbar!
- Duale Funktion $g(\lambda) = \min_{x \text{ nahe } x^*} f_0(x) + \lambda^T c_E(x) + \frac{c}{2}\|c_E(x)\|_2^2$ hat am Optimum die Hessesche

  $$D^2 g(\lambda^*) = -Dc_E(x^*)\Big[D^2 f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* D^2 g_i(x^*) + c\,\nabla c_E(x^*)\nabla c_E(x^*)^T\Big]^{-1} \nabla c_E(x^*)$$

  $\Rightarrow D^2 g(\lambda^*)$ nähert sich $-\frac{1}{c} I$ für $c \to \infty$ mit Konditionszahl 1

  $\Rightarrow$ extrem schnelle Konvergenz des dualen Anstiegs / sehr effiziente Newton-Methode.
- Für das duale Problem nutze modifiziertes Newton-Verfahren, indem Hessesche mit $-\frac{1}{c} I$ approximiert wird

  $$\Rightarrow \lambda_{k+1} = \lambda_k + c\,\nabla g(\lambda_k) = \lambda_k + c\, c_E(x_k)^T$$

  kann auch aufgefasst werden als Gradientenanstieg mit Schrittweite c

  wobei x_k $\quad f_0(x) + \lambda_k^T c_E(x) + \frac{c}{2}\|c_E(x)\|_2^2$ minimiert

Augmentierte Lagrange-Methode: Motivation mittels Bestrafung

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) \text{ s.d. } c_E(x)=0 \iff \min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) + \lambda^T c_E(x) \text{ s.d. } c_E(x)=0$$

für bel. $\lambda \in \mathbb{R}^p$

- Bestrafungsmethode – Zielfunktional $q(c,x) = f_0(x) + \lambda^T c_E(x) + \frac{c}{2}\|c_E(x)\|_2^2$

- Wenn $\lambda = \lambda^*$ für den Lagrange-Multiplikator des ursprünglichen Problems, dann ist

$$Dq(c,x^*) = Df_0(x^*) + \lambda^T Dc_E(x^*) + c_E(x^*)^T Dc_E(x^*) = 0$$

$\Rightarrow$ Bestrafungsmethode ist exakt für endlich großes c! $\Rightarrow$ Hessesche ist besser konditioniert

- optimaler Punkt x^* erfüllt $0 = Df_0(x^*) + \lambda^{*T} Dc_E(x^*)$

Bestrafungsmethoden-Iterat erfüllt $0 = Df_0(x_k) + (\lambda_k + c\, c_E(x_k))^T Dc_E(x_k)$

$\Rightarrow$ wähle $\lambda_{k+1} \approx \lambda^* \approx \lambda_k + c\, c_E(x_k)$

Augmentierte Lagrange-Methode: Algorithmus

Def: $L_c(x,\lambda) = f_0(x) + \lambda^T c_E(x) + \frac{c}{2}\|c_E(x)\|_2^2$ heißt augmentierte Lagrange-Funktion zu (P)

Alg: Geg: $f_0, c_E, x_0, \lambda_0, \varepsilon > 0$, monoton wachsende Folge $c_0, c_1, \ldots \nearrow \infty$, $k = 0$

repeat $\quad x_{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} L_{c_k}(x, \lambda_k)$ (lokale Minimierung)

$\quad\quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + c_k c_E(x_{k+1})$

$\quad\quad k \leftarrow k+1$

until $\quad |c_E(x_k)| \le \varepsilon$

Thm: Sei (x^*, λ^*) optimal für (P) & regulär bzgl. NB & erfülle die hinreichenden Opt.-Bed. 2. Ord.

Es gibt ein $c^* \in \mathbb{R}$ sodass $L_c(x, \lambda^*)$ ein lokales Minimum in x^* hat für alle $c > c^*$.

Bew: · 1. Ord. Opt. Bed. ist in x^* erfüllt, prüfe nur positive Definitheit von $D_x^2 L_c$

· $D_x^2 L_c(x^*, \lambda^*) = L_{xx}(x^*, \lambda^*) + c\, Dc_E(x^*)^T Dc_E(x^*) = A + cB$

A ist pos. def. auf $T_{x^*}S = \ker B$

B pos. def. auf $T_{x^*}S^\perp = \operatorname{span}(\nabla c_E(x^*))$

· angenommen, es gilt $c_k \nearrow \infty$, p_k mit $\|p_k\|_2 = 1$ & $p_k^T (A + c_k B) p_k \le 0$; für eine Teilfolge $p_k \to p$

· $p^T B p = \lim_k p_k^T B p_k \le \limsup_k \frac{-p_k^T A p_k}{c_k} = 0 \Rightarrow p^T B p = 0 \Rightarrow Bp = 0$

· $0 \ge \limsup_k p_k^T (A + c_k B) p_k = p^T A p + \limsup_k c_k \underbrace{p_k^T B p_k}_{\ge 0} \ge p^T A p \Rightarrow$ Widerspruch zu $p \in \ker B$ $\square$

Bem: Wegen Stetigkeit gilt Obiges auch in Umgebung von (x^*, λ^*) $\Rightarrow$ Methode ist wohldefiniert.

Augmentierte Lagrange-Methode: Beispiel

<u>Bsp</u>: $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \; 2x^2+2xy+y^2-2y \quad \text{s.d.} \quad x=0$

- $L_c(x,y,\lambda) = 2x^2+2xy+y^2-2y+\lambda x + \frac{c}{2}x^2$
- $(x_{k+1}, y_{k+1}) = \operatorname{argmin}\limits_{x,y} L_c(x,y,\lambda_k) = \left(-\frac{2+\lambda_k}{2+c_k}, \; \frac{4+c_k+\lambda_k}{2+c_k}\right)$

  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + c_k x_{k+1} = \frac{2\lambda_k + c_k\lambda_k}{2+c_k} + c_k\left(-\frac{2+\lambda_k}{2+c_k}\right) = \frac{2}{2+c_k}\lambda_k - \frac{2c_k}{2+c_k}$
- $\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} -2$ mit $(\lambda_{k+1}+2) = \frac{2}{2+c_k}(\lambda_k-2)$ $\Rightarrow$ lineare Konvergenz mit Konstante $\frac{2}{2+c_k}$

<u>Bsp</u>: $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \; 2x^2+2xy+y^2-2y \quad \text{s.d.} \quad x=0, \; y\le 0$

- ersetze durch $\min\limits_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \; 2x^2+2xy+y^2-2y \quad \text{s.d.} \quad x=0, \; y+z^2=0$
- $L_c(x,y,z,\lambda,\nu) = 2x^2+2xy+y^2-2y+\lambda x+\nu(y+z^2)+\frac{c}{2}x^2+\frac{c}{2}(y+z^2)^2$
- $(x,y,z)_{k+1} = \left(\frac{2\nu_k-4-2\lambda_k-c_k\lambda_k}{(2+c_k)(4+c_k)-4}, \; \frac{2-\nu_k}{2+c_k} + \frac{2\lambda_k-(4\nu_k-8)/(2+c_k)}{(2+c_k)(4+c_k)-4}, \; 0\right)$

  $(\lambda,\nu)_{k+1} = (\lambda_k,\nu_k) + c_k(x_{k+1}, y_{k+1})$ (= Fixpunktiteration für eine Kontraktion)
- $(\lambda_k,\nu_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,2)$ (lineare Konvergenz für festes c_k groß genug)

Augmentierte Lagrange-Methode: Konvergenzrate

nimm festes c an

Erinnerung: Update $\lambda_{k+1} = \lambda_k + c\, c_E(x_k) = \lambda_k + c\,\nabla g(\lambda_k)$ ist Gradientenanstieg für die duale Funktion g zu $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) + \frac{c}{2}\|c_E(x)\|_2^2$ s.d. $c_E(x)=0$

$\Rightarrow$ Konvergenzrate hängt ab von Eigenwerten von

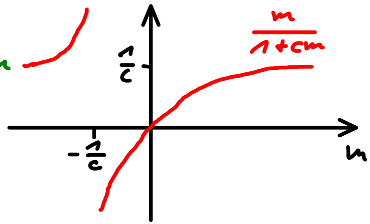
$$D^2 g(\lambda^*) = -\overbrace{Dc_E(x^*)}^{B}\Big[\overbrace{L_{xx}(x^*,\lambda^*)}^{A} + c\,Dc_E(x^*)^T Dc_E(x^*)\Big]^{-1} Dc_E(x^*)^T = -B(A+cB^TB)^{-1}B^T$$

Hessesche der dualen Funktion zu (P)

Thm: Sei m Eigenwert von $BA^{-1}B^T$, dann ist $\frac{m}{1+cm}$ ein Eigenwert von $B(A+cB^TB)^{-1}B^T$.

Bew:
- Mit Sherman-Morrison-Woodbury, $B(A+cB^TB)^{-1}B^T = F - cF(I+cF)^{-1}F$ mit $F = BA^{-1}B^T$
- Sei $Fv = mv$, dann $B(A+cB^TB)^{-1}B^T v = \left(m - c\frac{m^2}{1+cm}\right)v = \frac{m}{1+cm}v$ $\square$

Bem: Die Konvergenzrate des steilsten Anstiegs für das duale Problem zu (P) hängt ab von der Konditionszahl $\kappa(BA^{-1}B^T) = \frac{M}{m}$ für den kleinsten/größten Eigenwert m/M von $BA^{-1}B^T$.



(Der Einfachheit halber nehmen wir lokale Konvexität an.)

- Konvergenzrate der augmentierten Lagrange-Methode hängt ab von $\kappa(B(A+cB^TB)^{-1}B) = \frac{c+\frac{1}{m}}{c+\frac{1}{M}}$.
- Man kann die Konvergenzrate mit einer (modifizierten) Newton-Methode für g noch verbessern.