

# Faltungssatz

April 24, 2019

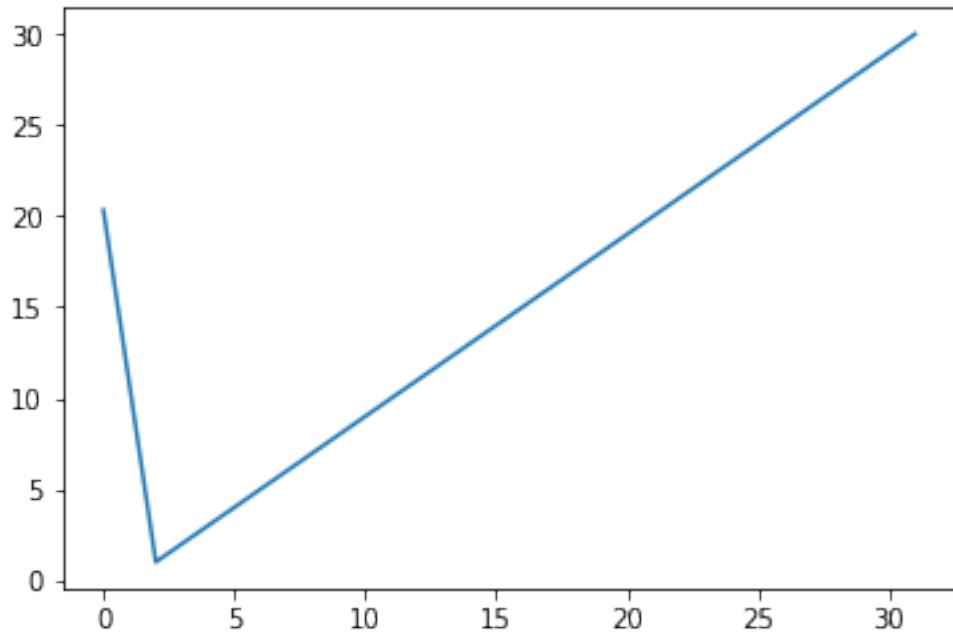
Wir definieren zunächst die symmetrische Faltung zweier Vektoren. Wir lassen zu, dass der zweite Vektor kürzer ist als der erste, in diesem Fall wird mit Nullen aufgefüllt.

```
In [1]: import math
        import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
```

```
In [2]: def symconv(y,z):
    n=len(y)
    m=len(z)
    if (m<n):
        z1=np.zeros(n)
        z1[0:m]=z
        z=z1
    x=np.zeros(n)
    for i in range(0,n):
        sum=0
        for k in range(0,n):
            sum=sum+y[k]*z[(i-k)%n]
        x[i]=sum
    return x
```

```
In [3]: n=32
        m=3
        y=np.array(range(0,n))
        z=np.zeros(n)
        z[0:m]=np.ones(m)/m
        x=symconv(y,z)
        plt.plot(x)
```

```
Out[3]: [
```



Jetzt realisiert mit der Fouriertransformierten. Wir nutzen die Implementation der FT von python.

```
In [4]: def fftconv(y,z):
    n=len(y)
    m=len(z)
    print(n,m)
    if (m<n):
        z1=np.zeros(n)
        z1[0:m]=z
        z=z1
    ydach=np.fft.fft(y)
    zdach=np.fft.fft(z)
    xdach=ydach*zdach
    x=np.fft.ifft(xdach)
    return x
```

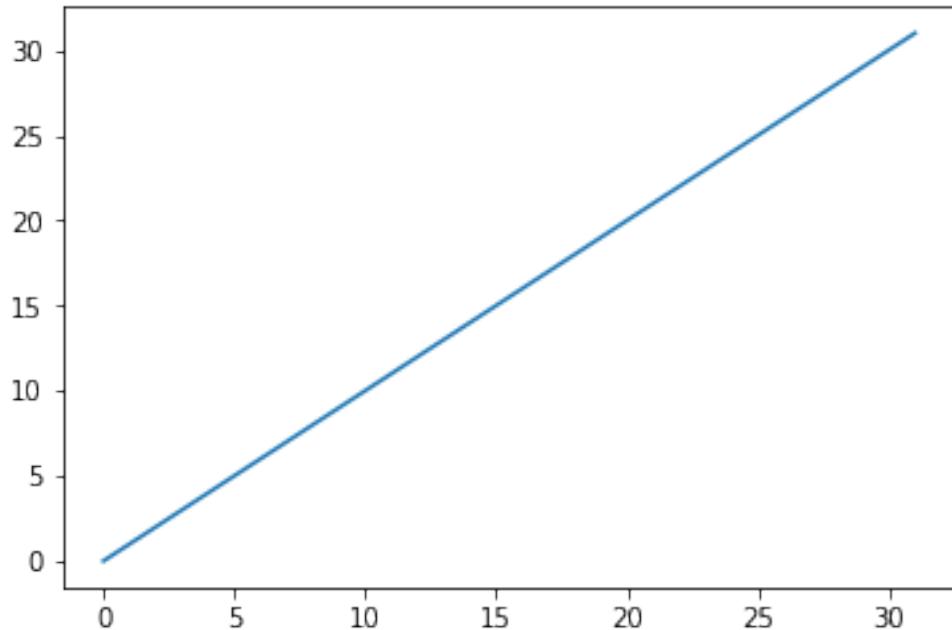
```
In [5]: x1=fftconv(y,z)
x1=x1.real
print(np.linalg.norm(x1-x))
```

```
32 32
1.2970142174948615e-14
```

Ok, das liefert das gleiche Ergebnis. Wir versuchen nun, aus dem Vektor  $x$  den Vektor  $y$  zurückzugewinnen wie in der Vorlesung.

```
In [6]: xdach=np.fft.fft(x)
zdach=np.fft.fft(z)
ydach=xdach/zdach
y1=np.fft.ifft(ydach)
y1=y1.real
plt.plot(y1)
print(np.linalg.norm(y-y1))
```

7.363850801373718e-14



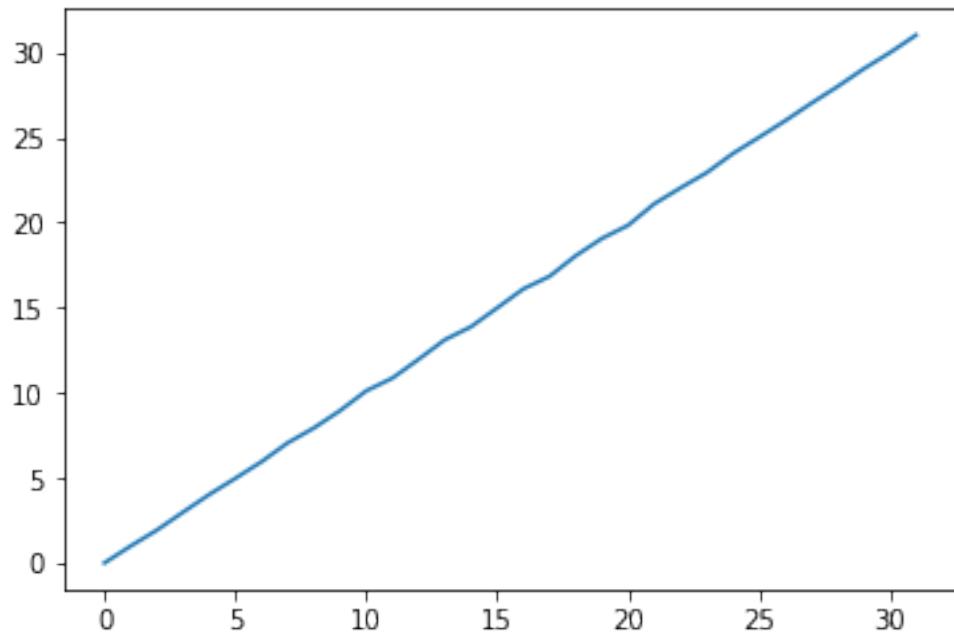
Super - das hat wunderbar funktioniert. Wir nehmen nun mal an, dass die Werte von x einen kleinen Fehler haben und wiederholen das Experiment.

```
In [7]: xnoisy=x+1e-2*np.random.normal(size=x.shape)
print(np.linalg.norm(xnoisy-x))
```

0.050548123445062584

```
In [8]: xnoisydach=np.fft.fft(xnoisy)
zdach=np.fft.fft(z)
ydach=xnoisydach/zdach
y1=np.fft.ifft(ydach)
y1=y1.real
plt.plot(y1)
print(np.linalg.norm(y-y1))
```

0.4091793713875028



Auch das hat funktioniert. Wir nutzen jetzt einen Faltungsvektor, wie er auch in der Signalverarbeitung zur Glättung genutzt wird.

In [ ]: h