Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 18.06.2019
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 10

Abgabe: 25.06.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: Uzawa Verfahren für stabilisierten Stokes (5 Punkte)
Für Finite Elemente, die nicht *inf-sup stabil* sind, wurde in der Vorlesung eine Stabilisierung eingeführt. Die stabilisierte Stokes Gleichung hatte dann beispielsweise die Form

$$(\nabla \boldsymbol{v}_h, \nabla \boldsymbol{\varphi}_h) - (p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_h) + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}_h, q_h) + \sum_{T \in \mathsf{T}_h} h_T^2 \, (\nabla p_h, \nabla q_h)_T = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\varphi}_h)\,.$$

Eine solche Stabilisierung führt auf die folgende Darstellung in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Leiten Sie den Uzawa-Algorithmus (Algorithmus 4.5) für das stabilisierte Stokes-Problem (ohne Vorkonditionierung mit der Matrix $\mathbf{M}_p^{-1}$) her.

(b) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen altem und neuem Druckfehler in einer Iteration des Uzawa Verfahrens für das stabilisierte Stokes-Problem her.

(c) In der Vorlesung wurde heuristisch durch Abzählen der Ableitungsstufen hergeleitet, dass die Massematrix $\mathbf{M}_p$ ein geeigneter Vorkonditionierer für den Uzawa-Algorithmus ist. Führen Sie ein analoges Abzählen der Ableitungsstufen für die Schurkomplementmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_S$ des stabilisierten Problems durch. Erwarten Sie, dass $\mathbf{M}_p$ wieder ein geeigneter Vorkonditionierer ist?

Aufgabe 2: Natürliche Norm für die Druckkomponente (4 Punkte)
Betrachten Sie das Stokesproblem in Sattelpunktsform

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ -\boldsymbol{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\boldsymbol{v}$ der Koeffizientenvektor einer Finite Elemente Funktion $\boldsymbol{v}_h \in V_h$ und $\boldsymbol{p}$ der Koeffizientenvektor einer Finite Elemente Funktion $p_h \in Q_h$. Die natürliche Norm für die Geschwindigkeitskomponente ist jetzt $\|\boldsymbol{v}\|_A = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}}$. Dies entspricht genau der H^1-Seminorm $\|\boldsymbol{v}_h\|_{H^1} = (\nabla \boldsymbol{v}_h, \nabla \boldsymbol{v}_h)$.
Zeigen Sie, dass die natürliche Norm für die Druckkomponente $\|\boldsymbol{p}\|_\Sigma = (\boldsymbol{\Sigma p}, \boldsymbol{p})^{\frac{1}{2}}$ (mit der Schurkomplementmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$) in folgendem Sinne ist

$$\inf_{\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{N_p}} \sup_{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{N_v}} \frac{\left(\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}\right)}{\|\boldsymbol{z}\|_A \|\boldsymbol{q}\|_\Sigma} = 1.$$

Das heißt die inf-sup Konstante für die Abbildung $B^T : \mathbb{R}^{N_v} \to \mathbb{R}^{N_p}$ bezüglich dieser natürlichen Normen ist 1.

Aufgabe 4: Teilschritt$-\theta-$Verfahren (4 Punkte)
In der Vorlesung wurde für den Verstärkungsfaktor im Teilschritt$-\theta-$Verfahren folgende Formel hergeleitet:

$$R(z) = \left(\frac{1 + (1-\theta)\,\alpha z}{1 - \theta \alpha z}\right)^2 \frac{1 + \theta\,(1 - 2\alpha)\, z}{1 - (1-\theta)\,(1-2\alpha)\, z}.$$

(a) Leiten Sie die Reihenentwicklung von $R(z) - exp(z)$ her. Beschränken Sie sich dabei auf den Fall $\theta = 1$. Welche Konsistenzordnung erhält man in Abhängigkeit von α?

(b) Leiten Sie für $Re(z) \to -\infty$ den Grenzwert von $|R(z)|$ in Abhängigkeit von θ her. Für welche θ ist das Verfahren stark A-stabil?