Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 04.06.2019
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 9

Abgabe: 18.06.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichungen (8 Punkte)

Wir betrachten zunächst die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}\\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

Der zusätzliche Term im Vergleich zu den Stokes-Gleichungen ist nichtlinear, was die numerische Lösung deutlich verkompliziert. Ein sehr einfacher Ansatz ist die Berechnung der Lösung über eine Fixpunktiteration mit voll expliziter Behandlung des nichtlinearen Terms. Ausgehend von einem Startwert $\mathbf{u}^0$, berechne iterativ für $l = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\nu(\nabla\mathbf{u}^l, \nabla\boldsymbol{\varphi}) - (p^l, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}) &= (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}) - ((\mathbf{u}^{l-1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^{l-1}, \boldsymbol{\varphi})\\ (\nabla\cdot\mathbf{u}^l, \xi) &= 0\end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllt ein Fixpunkt dieser Gleichung die schwache Formulierung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen. In jedem Iterationsschritt muss ein Stokes-System mit modifizierter rechter Seite gelöst werden.
Ein besseres Konvergenzverhalten erhält man mit einer semi-impliziten Behandlung des nichtlinearen Konvektionsterms (Oseen-Linearisierung):

$$\begin{aligned}((\mathbf{u}^{l-1}\cdot\nabla)\mathbf{u}^l, \boldsymbol{\varphi}) + \nu(\nabla\mathbf{u}^l, \nabla\boldsymbol{\varphi}) - (p^l, \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}) &= (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})\\ (\nabla\cdot\mathbf{u}^l, \xi) &= 0\end{aligned}$$

Nun müssen in jeder Iteration anstelle der Stokes-Gleichungen die linearen Oseen-Gleichungen gelöst werden.

(a) Berechnen Sie die algebraische Form der obigen Oseen-Gleichungen für eine konforme inf-sup stabile Diskretisierung (z.B. Taylor-Hood-Elemente), d.h. geben Sie Formeln für die einzelnen Matrizen und Vektoren in

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B_1}\\ \mathbf{B_2} & \mathbf{C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{g}\\ \mathbf{h}\end{pmatrix}$$

an.

(b) Welche Unterschiede in den Eigenschaften der Matrizen (bzgl. Invertierbarkeit, Definitheit, Symmetrie, ...) gibt es im Vergleich zur Diskretisierung der Stokes-Gleichungen?

(c) Was muss am Schurkomplement-Lösungsverfahren im Vergleich zur Stokes-Gleichung geändert werden?

(d) Welche Teile des Systems müssen in jedem Iterationsschritt neu assembliert werden, was kann wiederverwendet werden?

(e) Geben Sie ein Verfahren an, um die instationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

mit der Oseen-Linearisierung zu lösen (Hinweis: Implizites oder semi-implizites Eulerverfahren).

Aufgabe 2: Energieabschätzung für das Crank-Nicolson Verfahren (2 Punkte)
Betrachten Sie die Diskretisierung der homogenen Stokes-Gleichung mit dem Crank-Nicolson Verfahren

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-1}, \boldsymbol{\varphi}\right) + \frac{1}{2}\nu k \left(\nabla \boldsymbol{u}^n, \nabla \boldsymbol{\varphi}\right) + \frac{1}{2}\nu k \left(\nabla \boldsymbol{u}^{n-1}, \nabla \boldsymbol{\varphi}\right) - k \left(p^n, \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) &= 0, \\ \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}^n, \xi\right) &= 0 \end{aligned}$$

und zeigen Sie die Energieabschätzung

$$\|\boldsymbol{u}^n\|^2 + \frac{\nu k}{2} \|\nabla \boldsymbol{u}^n\|^2 \leq \left\|\boldsymbol{u}^{n-1}\right\|^2 + \frac{\nu k}{2} \left\|\nabla \boldsymbol{u}^{n-1}\right\|^2.$$

Hinweis: Testen Sie mit einer geeigneten Funktion $\boldsymbol{\varphi}$.