Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 28.05.2019
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 8

Abgabe: 04.06.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: DG und lokale Impulserhaltung (5 Punkte)
Zu einer exakten Lösung $\boldsymbol{u}$ des Stokesproblems ist der Spannungstensor definiert als $\sigma = \nabla \boldsymbol{u}$. Dieser erfüllt (mit Viskosität $\nu = 1$) eine lokale Impulserhaltungsgleichung:

$$-\int_{\partial T} \sigma \cdot \boldsymbol{n} + p\boldsymbol{n}\, ds = \int_T f\, dx.$$

Für die, aus der Vorlesung bekjannte, SIPG Diskretisierung des Stokes Problems ist der diskrete Spannungstensor gegeben als $\sigma_h = \{\nabla \boldsymbol{u}_h\} + \frac{\eta}{h}[\![\boldsymbol{u}_h]\!] \cdot \boldsymbol{n}$. Wählen Sie geeignete Testfunktionen und zeigen Sie, dass dieser analog zur exakten Lösung folgende diskrete, lokale Impulserhaltung erfüllt

$$-\int_{\partial T} \sigma_g \cdot \boldsymbol{n} + \{p\}\, \boldsymbol{n}\, ds = \int_T f\, dx.$$

Beschränken Sie sich dabei auf den zweidimensionalen Fall $V = \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$.

Aufgabe 2: Konsistenz der Stromliniendiffusion (3 Punkte)
In der Vorlesung wurde folgende stabilisierte Form der Navier Stokes Gleichung mit Hilfe der Stromliniendiffusion hergeleitet:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}, \varphi) + \nu\,(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla\varphi) - (p, \nabla\cdot\varphi) + \delta\,(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\varphi)&\\ +\delta\,(-\nu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla p - \boldsymbol{f}, \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\varphi) &= (\boldsymbol{f}, \varphi)\\ (\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \xi) &= 0.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Formulierung konsistent bezüglich der stationären, inkompressiblen Navier Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla p &= \boldsymbol{f}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= 0\end{aligned}$$

ist.