Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner 21.05.2019

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 7

Abgabe: 28.05.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: Stabilität der NIPG Diskretisierung (5 Punkte)
Im Gegensatz zu der SIPG Diskretisierung aus der Vorlesung gibt es auch die *„Non-Symmetric Interior Penalty Galerkin Method“* NIPG. Diese unterscheidet sich im Vorzeichen des Symmetrisierungsterms und ist damit nicht mehr symmetrisch. Die Operatoren sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{u}_h, \varphi_h\right) =& \sum_{T \in \mathsf{T}_h} \int_T \nabla \boldsymbol{u}_h \colon \nabla \varphi_h \, dx \\ &- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\nabla \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n}\} \left[\!\left[\varphi_h\right]\!\right] - \{\nabla \varphi_h \cdot \boldsymbol{n}\} \left[\!\left[\boldsymbol{u}_h\right]\!\right] ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{\eta}{h_e} \left[\!\left[\boldsymbol{u}_h\right]\!\right] \left[\!\left[\varphi_h\right]\!\right] ds \\ B\left(\boldsymbol{u}_h, q_h\right) =& - \sum_{T \in \mathsf{T}_h} \int_T \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h q_h \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{q_h\} \left[\!\left[\boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n}\right]\!\right] ds. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Operator A koerziv ist, also

$$A\left(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_h\right) \geq \alpha \left\|\boldsymbol{u}_h\right\|_{H^1}^2$$

für ein $\alpha > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Diskretisierung konsistent ist. Das heißt zeigen Sie, dass die exakte Lösung $u \in C^2$ des Stokesproblems auch das diskrete Problem $A\left(\boldsymbol{u}_h, \varphi_h\right) + B\left(\boldsymbol{u}_h, q_h\right) = (f, \varphi_h)$ löst.

Aufgabe 2: Adjungierte Konsistenz (3 Punkte)
Für das Poisson Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u =& f \text{ in } \Omega \\ u =& 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

kann man ebenfalls ebenfalls eine DG Diskretisierung wählen.

Dabei löst man $A(u,v) = F(v)\ \forall v \in V$ wobei gilt $F(v) = \int_\Omega f v \, dx$ und die Bilinearform gegeben ist durch

$$\begin{aligned} A^{SIPG}(u_h, \varphi_h) = &\sum_{T \in \mathsf{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx \\ &- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\nabla u_h \cdot \boldsymbol{n}\} [\![\varphi_h]\!] + \{\nabla \varphi_h \cdot \boldsymbol{n}\} [\![u_h]\!] \, ds \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{\eta}{h_e} [\![u_h]\!] [\![\varphi_h]\!] \, ds \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} A^{NIPG}(u_h, \varphi_h) = &\sum_{T \in \mathsf{T}_h} \int_T \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx \\ &- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \{\nabla u_h \cdot \boldsymbol{n}\} [\![\varphi_h]\!] - \{\nabla \varphi_h \cdot \boldsymbol{n}\} [\![u_h]\!] \, ds \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{\eta}{h_e} [\![u_h]\!] [\![\varphi_h]\!] \, ds \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass die SIPG Formulierung adjungiert konsistent ist. Das heißt für die Lösung $u \in C^2$ des exakten Problems (1) gilt

$$A^{SIPG}(v, u) = F(v).$$

(b) Zeigen Sie, dass die NIPG Formulierung nicht adjungiert konsistent ist.