Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner 14.05.2019

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 6

Abgabe: 21.05.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: Konsistenz der PSPG Formulierung (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die PSPG - Formulierung für das Stokes Problem

$$A\left(U_h, \Phi_h\right) + S_h\left(U_h, \Phi_h\right) = F\left(\Phi_h\right) \quad \forall \Phi_h = \left(\varphi_h, \xi_h\right) \in V_h \times Q_h$$

mit

$$\begin{aligned} A\left(U_h, \Phi_h\right) &= \nu\left(\nabla \boldsymbol{v}_h, \nabla \varphi_h\right) - \left(p_h, \nabla \cdot \varphi_h\right) + \left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}_h, \xi_h\right) \\ F\left(\Phi_h\right) &= \left(\boldsymbol{f}, \varphi_h\right). \end{aligned}$$

und der Stabilisierung

$$S\left(U_h, \Phi_h\right) = \sum_{T \in \mathsf{T}_h} \alpha h_T^2 \left(-\Delta \boldsymbol{v}_h + \nabla p_h - \boldsymbol{f}, \nabla \xi_h\right)_T$$

konsistent ist. Gehen Sie von do-nothing oder homogenen Dirichlet Randbedingungen aus.

(b) Weshalb erhält man im Fall

$$S\left(U_h, \Phi_h\right) = \sum_{T \in \mathsf{T}_h} \alpha h_T^2 \left(\nabla p_h, \nabla \xi_h\right)_T$$

keine konsistente Formulierung?

Aufgabe 2: DG und lokale Massenerhaltung (4 Punkte)
Die exakte Lösung $\boldsymbol{u}$ des starken Stokes Problems mit homogenen Dirichletranddaten erhält auch lokal die Masse, das heißt für jedes Dreieck T in der Triangulierung T_h gilt:

$$0 = \int_T \nabla \cdot \boldsymbol{u}\, dx = \int_{\partial T \setminus \partial \Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, ds.$$

Ein großer Vorteil der SIPG Formulierung für das Stokes Problem

$$A\left(\boldsymbol{u}_h, \varphi_h\right) + B\left(\varphi_h, p\right) = \left(\boldsymbol{f}, \varphi\right) \qquad \forall \varphi_h \in V_h \tag{1}$$

$$-B\left(\boldsymbol{u}_h, q_h\right) = 0 \qquad \forall q_h \in Q_h \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{u}_h, \varphi_h\right) =& \sum_{T \in \mathsf{T}_h} \int_T \nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \varphi_h \, dx \\ &- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{\nabla \boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n}\right\} [\![\varphi_h]\!] + \left\{\nabla \varphi_h \cdot \boldsymbol{n}\right\} [\![\boldsymbol{u}_h]\!] \, ds + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \frac{\eta}{h_e} [\![\boldsymbol{u}_h]\!][\![\varphi_h]\!] \, ds \\ B\left(\boldsymbol{u}_h, q_h\right) =& - \sum_{T \in \mathsf{T}_h} \int_T \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h q_h \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\{q_h\right\} [\![\boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{n}]\!] \, ds \end{aligned}$$

ist, dass sie eine entsprechende lokale Massenerhaltung

$$0 = \int_{\partial T \setminus \partial \Omega} \left\{\boldsymbol{u}\right\} \cdot \boldsymbol{n} \, ds. \tag{3}$$

garantiert. Nutzen Sie (2) und eine geeignete Testfunktion um (3) zu zeigen.

Aufgabe 3: Positiv-Definitheit unter Randbedingungen (2 Punkte)

Betrachte das Gleichungssystem

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv-definit, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit vollem Spaltenrang, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ positiv-semidefinit, $\mathbf{v}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$, $n \geq m$.

a) Zeigen Sie, dass das Schurkomplement $\mathbf{S}$ von $\mathbf{A}$ in $\mathbf{M}$ positiv definit ist.

Nun wird eine Randbedingung erzwungen, indem die i-te Zeile sowie die i-te Spalte von $\mathbf{M}$ auf den i-ten Einheitsvektor gesetzt werden, sowie der i-te Eintrag der rechten Seite auf den Randwert ($1 \leq i \leq n + m$).

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{S}$ symmetrisch positiv-definit und $\mathbf{C}$ positiv semidefinit bleiben.

c) Wie muss die rechte Seite geändert werden, damit sich die Lösung des Gleichungssystems (bis auf Änderungen durch das Festlegen des i-ten Eintrags) nicht ändert?