Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 07.05.2019
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner

Arbeitsblatt zur Übung

# Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 5

**Abgabe:** 14.05.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

**Aufgabe 1: Abschätzung für die $L^2$ - Projektion** (4 Punkte)
Es sei $\Omega_h$ ein form-, größen- und strukturreguläres Gitter. Weiters sei $e$ eine Kante des Elementes $T$ und $\bar{\varphi}_e$ die $L^2$-Projektion einer Funktion $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ auf den Kantenmittelwert.

(a) Zeigen Sie die Bestapproximationseigenschaft

$$\|\varphi - \bar{\varphi}_e\|_{L^2(e)} \leq \min_{\psi \in P^0} \|\varphi - \psi\|_{L^2(e)} .$$

(b) Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|\varphi - \bar{\varphi}_e\|_{L^2(e)} \leq c h^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_T .$$

*Hinweis: Transformieren sie auf ein Referenzelement und wenden sie dort den Spursatz und das Bramble-Hilbert-Lemma an.*

**Aufgabe 2: Energiefehler für $Q^{1,rot} - P^{0,dc}$** (2 Punkte)
Zeigen Sie folgende Abschätzung für den Energiefehler des nicht-konformen $Q^{1,\mathrm{rot}} - P^0$-Element.

$$\begin{aligned}&\|\nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)\| + \|p - p_h\| \\ &\qquad \leq c(\gamma)\, h \left( \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\nabla(\boldsymbol{v} - \varphi_h)\| + \inf_{\xi_h \in Q_h} \|p - \xi_h\| + \left\|\nabla^2 \boldsymbol{v}\right\| + \|\nabla p\| \right).\end{aligned}$$

Dabei ist $\gamma$ die diskrete inf-sup Konstante. Bekannte Abschätzungen aus der Vorlesung dürfen verwendet werden.

**Aufgabe 3: Inf-Sup Bedingung für $P^3 - P^{1,dc}$**

(a) Zeigen Sie, dass das $P^3 - P^{1,dc}$ Element inf-sup stabil ist. (6 Punkte)

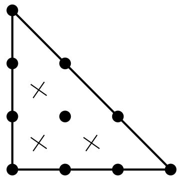

Abbildung 1: $P^3 - P^{1,dc}$ Element

*Hinweis: Man konstruiere eine Projektion $\pi_h$, die die Fortin-Bedingung erfüllt. Dazu setze man $\pi_h = C_h + E_h + B_h$, wobei $C_h$ die lineare Clément-Interpolation ist (für die äußeren Freiheitsgrade), $E_h$ die Kantenmittelwerte setzt und $B_h$ den Mittelwert in der Zelle sicherstellt.*

(b) Was passiert, wenn man $P^{1,dc}$ durch $P^1$ ersetzt? (1 Punkt)