Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 30.04.2019
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 4

Abgabe: 07.05.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: Systemmatrizen (2 Punkte)
Es sei Ω_h ein regelmäßiges Vierecksgitter mit $(M+1)^2$ Gitterknoten und M^2 Vierecken. Für das Taylor-Hood Element Q^2-Q^1 mit stetigem Druck sowie für das $Q^2-P^{1,dc}$ Element mit unstetigem Druck gebe man die Größe der Systemmatrix sowie der Teilmatrizen $\mathbf{A}$ sowie $\mathbf{B}$ in Bezug auf M an:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Wie viele von Null verschiedene Elemente entstehen maximal pro Zeile?

Aufgabe 2: Schur-Komplement (4 Punkte)
Betrachten Sie ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{v}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m$.

a) Eliminieren Sie den Vektor der Geschwindigkeitskoeffizienten $\mathbf{v}$, um ein Gleichungssystem $\mathbf{Sp} = \mathbf{b}$ für die Koeffizienten des Drucks zu erhalten. Die Matrix $\mathbf{S}$ wird Schur-Komplement (von $\mathbf{A}$ in $\mathbf{M}$) genannt.

b) Beweisen Sie, dass aus der Invertierbarkeit von $\mathbf{S}$ auch die Invertierbarkeit von $\mathbf{M}$ folgt.

c) Sei $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Geben Sie eine notwendige Bedingung für die Invertierbarkeit von $\mathbf{S}$ an.

Aufgabe 3: Viskosität in der a priori Abschätzung für Stokes (4 Punkte)
In der Vorlesung wurde folgende a priori Abschätzung für die Approximation einer Lösung des Stokes Problems mit inf-sup stabilen Elementen bewiesen (vergleiche Satz 3.3).

Satz 1 (Stokes a priori)**.** *Sei* $\{\boldsymbol{v}_h, p_h\} \in V_h \times Q_h$ *die Finite-Elemente Approximation eines* inf-sup stabilen *Finite-Elemente Paares der Ordnung* $\{r_v, r_p\} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *mit* $r_p < r_v$*. Besitzt das Lösungspaar* $\{\boldsymbol{v}, p\}$ *die Regularität* $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^d \cap H^{r_v+1}(\Omega)^d$ *und* $p \in L_0^2(\Omega) \cap H^{r_p+1}(\Omega)$*, so gelten die a-priori Abschätzungen:*

$$\|\nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h)\| + \|p - p_h\| \leq \frac{c}{\gamma_h}\left\{h^{r_v}\left\|\nabla^{r_v+1}\boldsymbol{v}\right\| + h^{r_p+1}\left\|\nabla^{r_p+1}p\right\|\right\} \tag{1}$$

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_h\| \leq \frac{c}{\gamma_h}\left\{h^{r_v+1}\left\|\nabla^{r_v+1}\boldsymbol{v}\right\| + h^{r_p+2}\left\|\nabla^{r_p+1}p\right\|\right\} \tag{2}$$

mit der Konstante γ_h *aus der diskreten inf-sup Bedingung.*

Dabei wurde nicht genauer auf die Abhängigkeit der Konstante von der Viskosität ν eingegangen. Führen Sie den Beweis für (1) erneut und geben Sie dabei die Abhängigkeit der Konstanten von ν explizit an. Für welche ν sind numerische Probleme zu erwarten?