Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 23.04.2019
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 3

Abgabe: 30.04.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: Existenz und Eindeutigkeit durch eine Energienorm (7 Punkte)
In dieser Aufgabe geht es um einen alternativen Beweis für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Stokesproblems. Folgender abstrakter Existenzsatz ist eine Modifikation des Lemmas von Lax-Milgram und ermöglicht eine gleichzeitige Behandlung von Druck und Geschwindigkeit.

Satz 1. Abstrakter Existenzsatz
Es sei $A : X \times X \to \mathsf{R}$ *eine stetige Bilinearform mit*

$$\begin{aligned} A(U,V) &\leq c\,|||U||| \cdot |||V|||\,, && (1)\\ c\,|||U||| &\leq \sup_{\substack{V\in X,\\ |||V|||=1}} A(U,V)\,. && (2) \end{aligned}$$

Dann existiert für jedes $l \in X^*$ *eine eindeutige Lösung* $U \in X$ *von*

$$A(U,V) = l(V)\ \forall\, V \in X,$$

mit $|||U||| \leq c\,\|l\|_{X^*}$.

Beachten Sie, dass c hier und im weiteren eine beliebige positive Konstante bezeichnet, die bei jedem Auftreten unterschiedlich sein kann.
Um den Satz anwenden zu können, definieren wir für ein $U = \{\mathbf{v}, p\} \in V \times Q$ die Norm

$$|||U||| = \left(\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

und die Bilinearform

$$A(U,V) = \nu\,(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{w}) - (p,\nabla\cdot\mathbf{w}) + (\nabla\cdot\mathbf{v}, q)\ \forall\, V = \{\mathbf{w}, q\} \in V \times Q.$$

Sie sollen nun zeigen, dass $A(\cdot,\cdot)$ und $|||\cdot|||$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllen.

(a) Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ eine Norm definiert.

(b) Beweisen Sie die Stetigkeit von $A(\cdot,\cdot)$.

Im Folgenden soll Ungleichung (2) bewiesen werden. Dafür werden nacheinander passende Testfunktionen verwendet.

(c) Konstruieren Sie eine geeignete Testfunktion V_1, so dass $A(U, V_1) = \nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2$.

(d) Für beliebiges $p \in Q$ beweisen Sie die Existenz eines $\tilde{\mathbf{v}} \in V$ mit $\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\| = 1$, so dass $\gamma \|p\| \leq (p, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})$ gilt.

(e) Verwenden Sie die Testfunktion $V_2 = -(\|p\| \tilde{\mathbf{v}}, 0)$ um zu zeigen, dass

$$A(U, V_2) \geq -\frac{\nu^2}{2\gamma} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|p\|^2 .$$

(f) Verwenden Sie eine passende Linearkombination V aus V_1 und V_2 um zu zeigen, dass $A(U, V) \geq c\, |||U|||^2$.

(g) Finden Sie eine obere Schranke für $|||V|||$ und beweisen Sie (2).

Aufgabe 2: Inf-Sup Konstante für Rechtecke (4 Punkte)

Es sei $\hat{\Omega} = (0, 1)^2$ und es gebe eine Konstante $\hat{\gamma} > 0$, so dass die inf-sup Bedingung gilt:

$$\hat{\gamma} \leq \inf_{p \in L^2(\hat{\Omega}) \setminus \mathbb{R}} \sup_{\varphi \in H_0^1(\hat{\Omega})^2} \frac{(p, \nabla \cdot \varphi)}{\|p\| \, \|\nabla \varphi\|}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für Ω quadratisch die inf-sup Konstante $\hat{\gamma}$ nicht von der Größe des Quadrates abhängt, dass also für jedes $\Omega = (0, L)^2$ die gleiche Konstante gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die inf-sup Konstante von der Anisotropie des Gebietes abhängt, dass heißt betrachten Sie nun das Gebiet $\Omega = (0, L) \times (0, 1)$ und zeigen sie, dass nicht die gleiche Konstante gilt.

Betrachten Sie die beiden Fälle $L \to \infty$ und $L \to 0$ und finden Sie jeweils eine untere Schranke für die inf-sup Konstante γ auf Ω in Abhängigkeit von $\hat{\gamma}$ und L.