Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. C. Engwer, Tobias Leibner

08.04.2019

Arbeitsblatt zur Übung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

SS 2019 — Blatt 1

Abgabe: 15.04.2019, 12:15 Uhr in Briefkasten 116

Aufgabe 1: Ableitung der Determinanten (2 Punkte)
Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ eine Matrix und A_{ij} die Matrix, die durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Zeigen Sie, dass für die partielle Ableitung der Determinanten gilt:

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Aufgabe 2: Polarkoordinaten (3 Punkte)
Betrachten Sie die Polarkoordinaten (φ, r) mit den zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)^T$ und $\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$. Die Geschwindigkeit v lässt sich je nach Koordinatensystem darstellen als

$$v = v_x \cdot \vec{e}_y + v_y \cdot \vec{e}_y = v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + v_r \cdot \vec{e}_r.$$

(a) Berechnen Sie die Darstellung des Ortes und der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten, das heißt stellen sie v_x, v_y, x und y in Abhängigkeit von v_r, v_φ, r und φ dar.

(b) Betrachten Sie nun eine stationäre Flüssigkeit mit konstanter Dichte und zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0.$$

Aufgabe 3: Beispielströmung (2 Punkte)
Gegeben sei die stationäre Strömung $v(x, y) = (-y, x)^T$.

(a) Nehmen Sie an, dass die Dichte konstant ist, und zeigen Sie, dass v die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

(b) Nehmen sie nun weiter an, dass keine äußeren Kräfte wirken. Nutzen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen, um den Druck in Abhängigkeit vom Ort zu bestimmen.

Aufgabe 4: Symmetrie des Spannungstensors (4 Punkte)

Das Drehmoment in einem Volumen V ist gegeben durch

$$M = \int_V r \times (\rho f)\, dx + \int_{\partial V} r \times (\sigma n)\, ds.$$

Dabei ist r der Ortsvektor zu einem Punkt.

(a) Bezeichne σ_i die i-te Spalte von σ. Zeigen Sie

$$r \times (\sigma n) = (r \times \sigma_1 \quad r \times \sigma_2 \quad r \times \sigma_3) \cdot n,$$

wobei $(\cdot)$ eine Matrix meint.

(b) Verwenden Sie den Satz von Gauß um zu zeigen dass

$$M = \int_V r \times (\rho f + \nabla \cdot \sigma)\, dx + \int_V \frac{\partial r}{\partial x} \times \sigma_1 + \frac{\partial r}{\partial y} \times \sigma_2 + \frac{\partial r}{\partial z} \times \sigma_3\, dx.$$

(c) Wenn keine Kräfte auf die Flüßigkeit wirken, also $\rho f + \nabla \cdot \sigma = 0$, so befindet sie sich im Gleichgewicht und das Drehmoment M ist 0. Zeigen Sie, dass daraus die Symmetrie des Spannungstensors folgt.

Aufgabe 5: Reynoldszahl (1 Punkt)

Von einem Auto mit $L = 5\ m$ soll ein Modell $L_m = 60\ cm$ erstellt und im Windkanal (Viskosität von Luft: $\nu = 1.7 \cdot 10^{-5}$) auf seine Eigenschaften untersucht werden.

(a) Das Auto soll bei $v = 36\ km/h$ und bei $v = 126\ km/h$ untersucht werden. Wie groß ist jeweils die Reynoldszahl?

(b) Welche Geschwindigkeiten müssen in einem Windkanal für das Modell eingestellt werden? Welche Geschwindigkeiten sind notwendig, wenn die Untersuchung in einem Wasserkanal (Viskosität $\nu = 1.0 \cdot 10^{-6}$) durchgeführt werden soll?