Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. Mario Ohlberger
Tobias Leibner

19. September 2019

Übung zum Kompaktkurs

Einführung in die Programmierung mit C++

Sommersemesterferien 2019 — Blatt 4

Aufgabe 1 (CG-Verfahren für quadratische Optimierungsprobleme)

Implementieren Sie das konjugierte-Gradienten (CG) Verfahren für quadratische Optimierungsprobleme der Form: finde

$$\bar{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

für Funktionen f der Form

$$f(x) := \frac{1}{2} x^T \cdot Ax - b^T \cdot x.$$

Im Minimum $\bar{x}$ gilt $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Wegen $\nabla f(x) = Ax - b$, löst das Minimum $\bar{x}$ also das lineare Gleichungssystem $A\bar{x} = b$. Schreiben Sie eine Funktion

```
Vector solve_cg(const Matrix& A, const Vector& b, double tol = 1e-8);
```

welche die Lösung dieses Systems mit Hilfe des CG Verfahrens (siehe unten) berechnet und zurückgibt.

Testen Sie Ihr Programm mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$; nehmen Sie $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Startvektor. Geben Sie am Anfang des Programs A und b aus, und am Ende des Programms (nach dem Aufruf von `x_bar = solve_cg(A, b, x_0)`) die Lösung $\bar{x}$. machen Sie außerdem die Probe und geben Sie $||A\bar{x} - b||_2$ aus.

Bemerkung 1 (Das CG Verfahren)

Nutzen Sie die Funktionalität von `Vector` und `Matrix` für den folgenden Algorithmus.

Gegeben: A, b, Startvektor $x^{(0)}$ und eine Toleranz `tol`.

Berechne

- $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$
- $d^{(0)} = r^{(0)}$

Für $k = 0, 1, \dots$ berechne

- $z^{(k)} = Ad^{(k)}$
- $\alpha^{(k)} = \big(r^{(k)} \cdot r^{(k)}\big) / \big(d^{(k)} \cdot z^{(k)}\big)$
- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} d^{(k)}$
- $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha^{(k)} z^{(k)}$
- $\beta^{(k)} = \big(r^{(k+1)} \cdot r^{(k+1)}\big) / \big(r^{(k)} \cdot r^{(k)}\big)$
- $d^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta^{(k)} d^{(k)}$

bis für das Residuum gilt: $||r^{(k)}||_2 <$ `tol`; $x^{(k+1)}$ ist dann eine Näherung für die Lösung des Gleichunssystems. Beachten Sie, daß $x^{(k)}$, $r^{(k)}$, $d^{(k)}$, $z^{(k)}$ Vektoren sind und daß $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$ reelle Zahlen sind.