Institut für Analysis und Numerik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Tim Keil, Tobias Leibner, Dr. Stephan Rave

13. September 2018

Übung zum Kompaktkurs

Einführung in die Programmierung zur Numerik mit Python

Sommersemester 2018 — Hausaufgabe

Abgabe Ihrer Lösungen als Emailanhang mit vollständigen Namen und Matrikelnummer an tim.keil@wwu.de bis spätestens Freitag, 28. September 2018, 17:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Mandelbrot-Menge)

Es sei für eine komplexe Zahl c die Funktion $\Phi_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\Phi_c(z) := z^2 + c.$$

Die Mandelbrotmenge $\mathbb{M}$ ist dann definiert als die Menge aller $c \in \mathbb{C}$, für welche die Folge $\Phi_c^{(k)}(0)$ beschränkt bleibt, also

$$\mathbb{M} := \Big\{ c \in \mathbb{C} \;\Big|\; \limsup_{k\to\infty} |\Phi_c^{(k)}(0)| < \infty \Big\}.$$

Man kann leicht zeigen, dass $\Phi_c^{(k)}(0)$ beliebig groß wird, sobald $\Phi_c^{(k)}(0)$ einen Wert von Betrag größer 2 annimmt. Daher gilt schon

$$\mathbb{M} = \Big\{ c \in \mathbb{C} \;\Big|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} |\Phi_c^{(k)}(0)| \leq 2 \Big\}.$$

Um $\mathbb{M}$ grafisch darstellen zu können, approximieren wir $\mathbb{M}$ zunächst für eine gegebene maximale Anzahl Iterationen N durch

$$\mathbb{M}_N := \Big\{ c \in \mathbb{C} \;\Big|\; |\Phi_c^{(k)}(0)| \leq 2 \;\; \forall k \in \mathbb{N}, k \leq N \Big\}.$$

Zur Visualisierung von $\mathbb{M}$ definieren wir nun die Funktion mandelbrot(x, y, N) als:

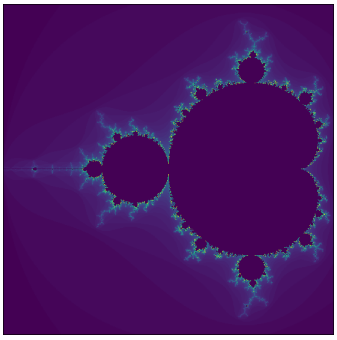
$$\text{mandelbrot}(x, y, N) := \begin{cases} 0 & x + iy \in \mathbb{M}_N \\ \min\Big\{ k \in \mathbb{N} \;\Big|\; |\Phi_{x+iy}^{(k)}(0)| > 2 \Big\} & \text{sonst} \end{cases}, \tag{1}$$

deren Wert wir zur Färbung des Pixels zur Koordinate (x, y) verwenden.

Auf der Kurshomepage finden Sie die Datei `mandelbrot.py`, in der bereits ein Hauptprogramm implementiert ist, welches die Funktion `mandelbrot(x,y,N)` für verschiedene `x`, `y` aufruft und das Ergebnis der Auswertungen als Grafik auf dem Bildschirm darstellt. Implementieren Sie in `mandelbrot.py` die noch fehlende Funktion `mandelbrot(x,y,N)` entsprechend der Definition (1), sodass die Mandelbrotmenge korrekt dargestellt wird!

Hinweise:

- *Bei fehlerfreier Implementierung von* `mandelbrot(x,y,N)` *erhalten Sie die folgende Bildschirmausgabe:*



- *Sie können die Rechnungen in* $\mathbb{C}$ *entweder händisch für Real- und Imaginärteil durchführen, oder den eingebauten Python-Typ* `complex` *verwenden.*

Aufgabe 2 (Lotka-Volterra-Modell)

Wir betrachten die Populationen $r(t)$, $b(t)$ von Räuber- und Beutetieren in einem abgeschlossenen Gehege. Wir nehmen an, dass die Beutetiere sich mit einer festen Rate ε_b vermehren, allerdings mit der Rate γ_b bei Zusammentreffen mit einen Räuber getötet werden. Nehmen wir an, dass die Anzahl der Treffen zwischen Räuber und Beute proportional zu $b(t) \cdot r(t)$ mit Proportionalitätskonstante μ ist, führt dies auf die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}b(t) = \varepsilon_b \cdot b(t) - \gamma_b \cdot \mu \cdot b(t) \cdot r(t).$$

Weiter nehmen wir an, dass die Räuber mit einer festen Rate ε_r sterben, wenn Sie nicht fressen, und sich mit der Rate γ_r vermehren, wenn Sie ein Beutetier erlegen. Damit lässt sich die Zeitentwicklung der Räuberpopulation modellieren als

$$\frac{d}{dt}r(t) = -\varepsilon_r \cdot r(t) + \gamma_r \cdot \mu \cdot b(t) \cdot r(t).$$

Gehen wir von anfänglichen Populationen r_0 und b_0 von Räubern und Beutetieren aus, erhalten wir auf dem Zeitintervall $[0, T]$ insgesamt das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}b(t) &= \quad \varepsilon_b \cdot b(t) - \gamma_b \cdot \mu \cdot b(t) \cdot r(t) \quad \forall t \in [0,T], && b(0) = b_0, \\
\frac{d}{dt}r(t) &= -\varepsilon_r \cdot r(t) + \gamma_r \cdot \mu \cdot b(t) \cdot r(t) \quad \forall t \in [0,T], && r(0) = r_0.
\end{aligned}$$

Approximieren wir nun die Zeitableitungen durch Vorwärts-Differenzenquotienten

$$\frac{d}{dt}b(t) \approx \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t}, \quad \frac{d}{dt}r(t) \approx \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t},$$

definieren $\Delta t := T/N$ und setzen

$$b^{(n)} := b(n \cdot \Delta t), \quad r^{(n)} := r(n \cdot \Delta t), \qquad n = 0, \ldots, N,$$

führt uns dies auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b^{(n+1)} &= b^{(n)} + \Delta t \cdot \Big(\varepsilon_b \cdot b^{(n)} - \gamma_b \cdot \mu \cdot b^{(n)} \cdot r^{(n)} \Big) \quad \forall n \in 0, \ldots, N-1, \quad b^{(0)} = b_0, \\ r^{(n+1)} &= r^{(n)} + \Delta t \cdot \Big(-\varepsilon_r \cdot r^{(n)} + \gamma_r \cdot \mu \cdot b^{(n)} \cdot r^{(n)} \Big) \quad \forall n \in 0, \ldots, N-1, \quad r^{(0)} = r_0. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Schreiben Sie ein Programm, welches das Gleichungssystem (2) für die Konstanten

$$\begin{array}{lllll} \varepsilon_b = 2 & \gamma_b = 0.01 & b_0 = 300 & T = 10 & \mu = 1 \\ \varepsilon_r = 1 & \gamma_r = 0.01 & r_0 = 150 & N = 10000 & \end{array}$$

löst und die Folgen $b^{(n)}$, $r^{(n)}$ in Python-Listen `b`, `r` speichert. Plotten Sie den zeitlichen Verlauf der Räuber- und Beutetierpopulationen, z.B. mit dem folgenden `matplotlib`-Code:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.plot(np.linspace(0, T, N+1), b, label='Beute')
plt.plot(np.linspace(0, T, N+1), r, label='Räuber')
plt.legend()
plt.show()
```

(b) Was passiert, wenn Sie die Anzahl der Zeitschritte N auf 100 und weiter auf 20 verringern?

(c) Berechnen Sie auch die Lösung des modifizierten Zeitschrittverfahrens

$$\begin{aligned} b^{(n+1)} &= b^{(n)} + \Delta t \cdot \Big(\varepsilon_b \cdot b^{(n)} - \gamma_b \cdot \mu \cdot b^{(n)} \cdot r^{(n)} \Big) \quad \forall n \in 0, \ldots, N-1, \quad b^{(0)} = b_0, \\ r^{(n+1)} &= r^{(n)} + \Delta t \cdot \Big(-\varepsilon_r \cdot r^{(n)} + \gamma_r \cdot \mu \cdot b^{(n+1)} \cdot r^{(n)} \Big) \quad \forall n \in 0, \ldots, N-1, \quad r^{(0)} = r_0. \end{aligned}$$

Wie verhält sich die Lösung für $N = 100$ und $N = 20$?