Seminar Gruppen und Topologie

24. Januar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Hellys Theorem *C. Heinke*

[DGK63] Hier wird ein verblüffender Satz aus der konvexen Geometrie behandelt.

- Hellys Theorem angeben und beweisen.
- Anwendung 2.5 beweisen.

2 Bruhat-Tits Fixpunktsatz *E. Stadtländer*

[AB08, 11.1, 11.3][BH99, II.2.8] Jede Wirkung einer endlichen Gruppe auf einem vollständigen CAT(0)-Raum hat einen Fixpunkt.

- Def. CAT(0)-Raum Angabe der zugehörigen Ungleichungen. [11.1]
- Beweis des Fixpunktsatzes. [11.3]
- Korollar 2.8 (2) beweisen.

3 Erzeuger von $\mathrm{Aut}(F_n)$ *E. Liesbrock*

[Bog08, III.1] Mit F_n wird die freie Gruppe vom Rang n bezeichnet. Hier wird ein sehr nützliches Erzeugendensystem von $\mathrm{Aut}(F_n)$ eingeführt.

- Elementare Nielsen-Transformationen und Nielsen-Automorphismen.
- Beweis, dass die Nielsen-Automorphismen $\mathrm{Aut}(F_n)$ erzeugen. [Bog08, III.1.5]
- Epimorphismus $\mathrm{Aut}(F_n)$ nach $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ angeben.

4 Präsentierung von $\mathrm{SAut}(F_n)$ *L. Schroer*

[Ger84]

- $\mathrm{SAut}(F_n)$ definieren.
- Nielsen- und Whitehead-Automorphismen definieren.
- Die Steinberggruppe einführen.
- Die Theoreme 1.4. und 2.8. über die Präsentierungen von $\mathrm{SAut}(F_n)$ beweisen.
- Wenn noch Zeit bleibt, kann etwas über die universelle zentrale Erweiterung von $\mathrm{SAut}(F_n)$ gesagt werden.

5 Wort- und Transformationsproblem für hyperbolische Gruppen *M. Wunderlich*

[BH99, III.Γ.2]

- Definition einer hyperbolischen Gruppe. Wort- und Konjugationsproblem.
- Dehns Algorithmus.
- Beweis der Lösbarkeit des Wortproblems (Thm. 2.6)
- Beweis der Lösbarkeit des Konjugationsproblems (Thm. 2.8)
- siehe auch [CgRR08]

6 Wörter mit kleinen Bildern in einfachen endlichen Gruppen *M. Landwehr*

[KN11] Ein Wort w mit den Buchstaben $a_1, \ldots, a_n$ definiert für jede Gruppe G auf natürliche Weise eine Abbildung von G^n nach G. Diese Abbildung muss im Allgemeinen nicht surjektiv sein. Es wird sogar gezeigt, dass auch für nichtkonstante Wörter das Bild im Verhältnis zur Ordnung von G sehr klein sein kann.

- Theorem 1 (obige Aussage) durch die Einleitung motivieren.
- Theorem 2 beweisen. Hier ist G eine alternierende Gruppe.
- Theorem 1 folgt aus Theorem 2.
- Das 3. Theorem ist eine zu Theorem 2 ähnliche Aussage, aber für spezielle lineare Gruppen über endlichen Körpern. Dieses soll bewiesen werden.

7 Affine Spiegelungsgruppen *M. Schäfer*

[Gar97, 12.1 12.2] Hier wird gezeigt, dass Spiegelungsgruppen Coxetergruppen sind.

- Geometrische Grundbegriffe [12.1]
- Spiegelungsgruppen einführen
- Coxetergruppen durch eine Präsentierung definieren
- Äquivalente Charakterisierung mit der Streichungseigenschaft nur angeben.
- Beweis, dass Spiegelungsgruppen Coxetergruppen sind. [12.2]
- Siehe auch [Bro89].

8 Eine untere Schranke für das Prüfen von residueller Endlichkeit *R. Loose*

[KM11] Die freie Gruppe vom Rang n ist residuell endlich. Für ein beliebiges Element g von F_n wird eine untere Schranke für die Ordnung einer Gruppe H angegeben, so dass die Projektion von F_n nach H das Element g entdeckt, das heisst, dass g nicht im Kern liegt.

- Definition der residuellen Endlichkeit einer Gruppe.
- Korollar 11 beweisen.
- Theorem 1 beweisen. Lucchinis Satz braucht nur angegeben werden.

9 Bruhat-Tits-Baum *L. Buggisch*

[Ser80, II.1.]

- Einführung eines diskret bewerteten Körpers.
- Definition von Gittern.
- Beweis von Theorem 1, welches besagt, dass der durch die Gitter definierte Graph ein Baum ist.

10 Der Komplex der freien Faktoren einer freien Gruppe *N. Leder*

[HV98][Hat95] Es soll gezeigt werden, dass für die freie Gruppe vom Rang n der Komplex der freien Faktoren $(n-2)$-fach zusammenhängend ist.

- Einführung des Komplexes von Sphärensystemen. (Hier sind einige Grundkenntnisse der algebraischen Topologie notwendig.)
- Einführung des Komplexes FC_n.
- Beweis: FC_n ist zusammenhängend für $n \geq 3$ und einfach zusammenhängend für $n \geq 4$.
- Beweis: von [HV98, 3.5]

11 Der Raum der endlichen Bäume mit n Blättern *M. Steffen*

[BHV01] Der obige Raum ist ein CAT(0)-Raum. Solche Bäume können Stammbäume für DNA-Folgen sein, d.h. solch ein Baum gibt die Verwandtschaft der Arten zueinander an. Der Schwerpunkt einer endlichen Menge solcher Stammbäume gibt darüber Auskunft, welche Verwandtschaft zwischen den Arten wahrscheinlicher ist.

- Einführung des Raumes der n-Bäume.
- Beweis, dass der Raum ein CAT(0)-Raum ist.
- Die Bedeutung des Schwerpunktes erklären.

12 Trivialitätsbedingung für Wirkungen auf Bäumen *T. Müller*

[BriXX] Hier wird gezeigt das eine Wirkung durch Isometrien von $\mathrm{Aut}(F_n)$ auf einem $\mathbb{R}$-Baum einen Fixpunkt hat.

Literatur

[AB08] P. Abramenko and K.S. Brown. *Buildings*, volume 248 of *Grad. Texts in Math.* Springer, New York, 2008.

[BH99] M.R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[BHV01] L.J. Billera, S.P. Holmes, and K. Vogtmann. Geometry of the space of phylogenetic trees. *Adv. in Appl. Math.*, 27(4):733–767, 2001.

[Bog08] O. Bogopolski. *Introduction to group theory.* European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[BriXX] M. Bridson. A condition that prevent groups from acting non-trivially on trees. *Geometry And Topolgy Monographs*, pages 1001–1005, 20XX.

[Bro89] K.S. Brown. *Buildings.* Springer-Verlag, New York, 1989.

[CgRR08] T. Camps, V. große Rebel, and G. Rosenberger. *Einführung ind die kombinatorische und die geometrische Gruppentheorie*, volume 19. Heldermann Verlag, 2008.

[DGK63] L. Danzer, B. Grünbaum, and V. Klee. Helly's theorem and its relatives. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII*, pages 101–180. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963.

[Gar97] P. Garrett. *Buildings and classical groups.* Chapman & Hall, London, 1997.

[Ger84] S.M. Gersten. A presentation for the special automorphism group of a free group. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 33(3):269 – 279, 1984.

[Hat95] A Hatcher. Homological stability for automorphism groups of free groups. *Com. Math. Helv.*, 70:39–62, 1995.

[HV98] A. Hatcher and K. Vogtmann. The complex of free factors of a free group. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 49(196):459–468, 1998.

[KM11] M. Kassabov and Matucci. Bounding the residual finiteness of free groups. *arXiv:0912.2368v2*, 2011.

[KN11] M. Kassabov and N. Nikolov. Words with few values in finite simple groups. *arXiv:1112.5484v1*, 2011.

[Ser80] J.-P. Serre. *Trees*. Springer-Verlag, Berlin, 1980.