Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel SS 11

12. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 8.7.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Wiederholung einiger Übungsserien zum Test für den Vorbereitungsstand

Aufgabe 12.1 (Isomorphiesatz)

Es sei G eine Gruppe, und es seien H eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass $H/(H \cap N)$ isomorph zu $(HN)/N$ ist.

Aufgabe 12.2 (Alternierende Gruppe)

Es seien G_1 und G_2 einfache Gruppen.

i) Es sei ϕ ein Gruppenepimorphismus von $G_1 \times G_2$. Wir fixieren $i, j \in \{1, 2\}$ und definieren die Abbildung ϕ_{ij} von G_j nach G_i durch

$$\phi_{ij} := \mathrm{proj}_i \circ \phi \circ \mathrm{incl}_j,$$

wobei proj_i die kanonische Projektion von $G_1 \times G_2$ nach G_i und incl_j die kanonische Einbettung von G_j sind. Zeigen Sie, dass ϕ_{ij} trivial oder bijektiv ist.

ii) Es seien G_1 und G_2 zwei einfache Gruppen. Berechnen sie $\mathrm{Aut}(G_1 \times G_2)$ in Termen der G_i.

iii) Berechnen Sie die Automorphismengruppe von

$$\bigoplus_{n \geq 7} \mathrm{Alt}(n).$$

Hinweis: Machen Sie für ii) eine Fallunterscheidung:

1) $G_1 \ncong G_2$.
2) $G_1 \cong G_2$ und G_1 ist abelsch.
3) $G_1 \cong G_2$ und G_1 ist nicht abelsch. Betrachten Sie ein Kranzprodukt mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 12.3 (Fundamentalgruppen)

Zeigen Sie, dass eine beliebige endliche Gruppe isomorph zur Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden topologischen Raumes ist.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 12.4 (Cayleygraph)

Es sei C der Cayleygraph einer endlich erzeugten Gruppe G zum endlichen Erzeugendensystem S. Finden Sie einen einfach zusammenhängenden toplogischen Raum X und eine Überlagerung $X \to C$. Geben Sie damit die Fundamentalgruppe von C an.

Aufgabe 12.5 (quasi-Isometrie)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ quasi-isometrisch zu F_2 ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Aufgaben 9.2 und 11.1.

Aufgabe 12.6 (quasi-Isometrie von Quotienten)

Beweisen oder widerlegen Sie, die folgende Aussage. Für eine endlich erzeugte Gruppe G und einen Normalteiler N von G gilt: Wenn G quasi-isometrisch zu G/N ist, dann ist N endlich erzeugt.

Hinweis: Betrachten sie freie Gruppen.