Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

11. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 1.7.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Quasi-Isometrien, Faktorgruppen, Kommensurabilität

Aufgabe 11.1 (Faktorgruppen quasi-isometrisch zur Gruppe)

Es sei G eine endlich erzeugte Gruppe und N ein Normalteiler von G. Zeigen Sie, dass die kanonische Projektion von G nach G/N genau dann eine quasi-Isometrie ist, wenn N endlich ist.

Aufgabe 11.2 (quasi-isometrische Vektorräume)

Zeigen Sie, dass für natürliche Zahlen $n \neq m$ die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ (versehen mit beliebigen Normen) nicht zueinander quasi-isometrisch sind. (Hinweis: Milnor-Švarc.)

Aufgabe 11.3 (Transitivität der Kommensurabilität)

Zeigen Sie, dass die Kommensurabilität zwischen Gruppen eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 11.4 (Heisenberggruppe)

Wir betrachten die Heisenberggruppe über $\mathbb{Z}$, d.h. die Matrizengruppe

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es sei S ein endliches Erzeugendensystem von G. Zeigen Sie, dass eine endlich erzeugte Untergruppe H von G existiert, so dass für alle endlichen Erzeugendensysteme T von H das Paar (H, d_T) nicht quasi-isometrisch zu $(H, d_S|_{H\times H})$ ist.