Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

10. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 24.6.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Quasi-Isometrien, Äquivalenz von Normen

Aufgabe 10.1 (Alternative Definition von quasi-Isometrie)

Häufig wird der Begriff der quasi-Isometrie wie folgt eingeführt: Eine Abbildung

$$f \colon X \to Y$$

heißt *quasi-isometrische Einbettung* wenn es Konstanten $\lambda \geq 1$ und $\varepsilon \geq 0$ gibt, so dass

$$\frac{1}{\lambda} d(x_1, x_2) - \varepsilon \leq d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) + \varepsilon$$

für beliebige $x_1, x_2 \in X$ gilt. Sie heißt *quasi-Isometrie*, wenn es außerdem eine Konstante $R \geq 0$ gibt, so dass für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $d(f(x), y) \leq R$.

Zeigen Sie, dass diese Definition äquivalent zu der aus der Vorlesung ist.

Aufgabe 10.2 (Transitivität von quasi-Isometrie)

Zeigen Sie, dass die Relation metrischer Räume, quasi-isometrisch zueinander zu sein, eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 10.3 (Nicht quasi-isometrische Gruppen)

Wir betrachten die Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ und F_2 als metrische Räume mit der Wortmetrik bezüglich ihrer kanonischen Erzeugendensysteme. Zeigen Sie, dass keine zwei davon quasi-isometrisch zueinander sind.

Aufgabe 10.4 (Quasi-Isometrien von $\mathbb{R}^n$)

i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{R}^n$ quasi-isometrisch bezüglich der 1-Norm sind.
ii) Es seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie dass $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ und $(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||)$ quasi-isometrisch zueinander sind.