Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

9. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 10.6.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Satz von Hall, Pingpong Lemma, residuell endliche Gruppen, Kommutatorgruppe

Aufgabe 9.1 (Satz von Hall)

Wir betrachten die freie Gruppe $F_3 = F(\{\alpha, \beta, \gamma\})$. Sei $H \subseteq F_3$ die von $\alpha\beta\gamma$ und $\gamma\beta\alpha$ erzeugte Untergruppe. Finden Sie eine Untergruppe $L \subseteq F_3$ von endlichem Index, die H als freien Faktor hat. Geben Sie Basen von H und L an.

Aufgabe 9.2 (Freie Gruppen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

Zeigen Sie, dass die Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, die von

$$u_+ := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_- := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird, frei von Rang 2 ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Wirkung auf $\mathbb{R}^2$ und wenden Sie das Pingpong-Lemma auf die Mengen

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\} \quad \text{und} \quad Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > |x|\}$$

an.

Aufgabe 9.3 (Freie Gruppen sind residuell endlich.)

Zeigen Sie mit Aufgabe 9.2, dass alle freien Gruppen residuell endlich sind.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst freie Gruppen von endlichem Rang.

Aufgabe 9.4 (Kommutatorgruppe)

In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass die Kommutatorgruppe einer Gruppe im Allgemeinen nicht aus Kommutatoren besteht. D.h. im Allgemeinen ist das Produkt zweier Kommutatoren kein Kommutator. Wir betrachten dazu $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

i) Zeigen Sie: wenn $[g, h] = -1$ für Elemente $g, h \in G$, dann haben g und h Spur 0.

ii) Zeigen Sie, dass jedes Element $g \in G$ von Spur 0 in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert zu

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

iii) Zeigen Sie, dass $[a, g] \neq -1$ für $g \in G$ mit Spur 0.

iv) Folgern Sie, dass die Kommutatorgruppe von G nicht nur Kommutatoren enthält.

v*) Zeigen Sie: ist k ein Körper, dann ist $-1 \in \mathrm{SL}_2(k)$ genau dann ein Kommutator, wenn $-1 \in k$ Summe zweier Quadrate ist.