Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

8. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 3.6.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Freie Gruppen, Graphen, Überlagerungen, Bäume, Satz von Schreier, Algorithmus aus 2.36

Aufgabe 8.1 (Zentralisatoren in freien Gruppen)

Es sei F eine freie Gruppe.

i) Zeigen Sie, dass der Zentralisator $\mathrm{Z}_F(g)$ jedes Elementes $g \in F \setminus \{1\}$ unendlich und zyklisch ist.

ii) Zeigen Sie: Wenn $g, h \in F$ und $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Eigenschaft haben, dass g^k und h^l miteinander kommutieren, dann gibt es ein $f \in F$ mit $g = f^m$ und $h = f^n$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. Folgern Sie, dass die Relation miteinander zu kommutieren eine Äquivalenzrelation auf $F \setminus \{1\}$ ist.

Aufgabe 8.2 (Basiselemente in einer Fundamentalgruppe)

Es seien X ein endlicher Graph und $Y \subseteq X$ ein Kreis, d.h. ein zu S^1 homöomorpher Teilgraph. Es seien y eine Ecke von Y und $\hat{c} : [0,1] \to Y$ ein reduzierter Kantenweg, der $\pi_1(Y, y) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt. Zeigen Sie, dass in $\pi_1(X, y)$ eine Basis existiert, die $[\hat{c}]$ enthält.

Aufgabe 8.3 (Algorithmus 2.36)

Es sei X der Kantengraph eines Würfels. Wir betrachten den Würfel eingebettet in $\mathbb{R}^3$, so dass die Ecken genau die Punkte

$$(i, j, k), \ i, j, k \in \{0, 1\}$$

sind. Die Kanten seien immer von 0 weg orientiert. Es sei H die Untergruppe von $\pi_1(X, 0)$, die von den folgenden Klassen $[c_1], \ldots, [c_5]$ erzeugt wird. Wir geben die Wege durch die Basisvektoren

$$e_1 := (1, 0, 0), \ e_2 := (0, 1, 0), \ e_3 := (0, 0, 1)$$

an. Alle Wege starten und enden bei $(0, 0, 0)$.

- $c_1 := e_3 e_1 (-e_3)(-e_1)$
- $c_2 := e_3 e_2 (-e_3)(-e_2)$
- $c_3 := e_1 e_3 (-e_1) e_2 (-e_3)(-e_2)$
- $c_4 := e_1 e_3 e_2 (-e_3)(-e_2)(-e_1) c_2$
- $c_5 := e_2 e_3 e_1 (-e_3)(-e_1)(-e_2) c_1$

Finden Sie einen zusammenhängenden Graphen Z mit Fundamentalgruppe H, so dass eine lokal injektive Abbildung von Graphen existiert, die Z nach $\pi_1(X, 0)$ abbildet. Bestimmen Sie den Rang der freien Gruppe H.

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Kantenwege.

Aufgabe 8.4 (Untergruppen von endlichem Index in einer freien Gruppe)

Wir fixieren eine natürliche Zahl n.

i) Zeigen Sie, dass eine endlich erzeugte freie Gruppe nur endlich viele Untergruppen vom Index n enthält.

ii) Zeigen Sie, dass eine endlich erzeugte Gruppe nur endlich viele Untergruppen vom Index n enthält.

Hinweis: Betrachten Sie den Cayley-Graphen X von F_m bezüglich einer Basis $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Schätzen Sie die Anzahl von F_m-äquivarianten Überlagerungen $X \to Z$ mit geeigneten endlichen Graphen Z mit F_m-Wirkung ab. Eine andere Möglichkeit wäre es, direkt (ii) zu beweisen, indem man die Anzahl von geeigneten Gruppenhomomorphismen abschätzt, um die Anzahl geeigneter Normalteiler abzuschätzen.