

7. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(Abgabe: bis Freitag, 27.5.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Seifert–van Kampen, amalgamierte Produkte, Nilpotenz

Aufgabe 7.1 (Seifert–van Kampen)

- i) Es sei $T = S^1 \times S^1$ ein 2-Torus und $U \subseteq T$ eine kleine offenen Kreisscheibe. Zeigen Sie, dass $\pi_1(T \setminus U)$ eine freie Gruppe mit zwei Erzeugern ist (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass die Aussage unabhängig von dem gewählten U ist.)

Hinweis: Wählen Sie U so, dass $T \setminus U$ eine Umgebung von $S^1 \vee S^1$ ist.

- ii) Es seien T_1 und T_2 zwei 2-Tori und $T_1 \# T_2$ der Raum der wie folgt entsteht: Aus T_1 und T_2 werden kleine offene Kreisscheiben U_1 bzw. U_2 herausgeschnitten und die beiden entstandenen Flächen entlang des Randes verklebt. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(T_1 \# T_2) \cong \pi_1(T_1 \setminus U_1) *_{\mathbb{Z}} \pi_1(T_2 \setminus U_2)$$

ist, wobei \mathbb{Z} mit $\pi_1(\partial U_1) \cong \pi_1(\partial U_2)$ identifiziert wird.

- (iii*) Folgern Sie die Präsentation

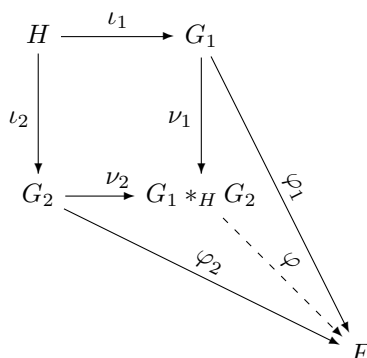
$$\pi_1(T_1 \# T_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \rangle .$$

Aufgabe 7.2 (Universelle Eigenschaft für amalgamierte Produkte)

Es seien H, G_1, G_2 Gruppen und $\iota_1: H \rightarrow G_1$ und $\iota_2: H \rightarrow G_2$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass das amalgamierte Produkt $G_1 *_H G_2$ folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Es gibt Homomorphismen $\nu_1: G_1 \rightarrow G_1 *_H G_2$ und $\nu_2: G_2 \rightarrow G_1 *_H G_2$ so dass $\nu_1 \circ \iota_1 = \nu_2 \circ \iota_2$ und wenn F eine Gruppe ist und $\varphi_1: G_1 \rightarrow F$ und $\varphi_2: G_2 \rightarrow F$ Homomorphismen mit $\varphi_1 \circ \iota_1 = \varphi_2 \circ \iota_2$, dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi: G_1 *_H G_2 \rightarrow F$ mit $\varphi \circ \nu_1 = \varphi_1$ und $\varphi \circ \nu_2 = \varphi_2$.

Mit anderen Worten, wenn das durchgezogene Diagramm unten kommutiert, dann gibt es eindeutig die gestrichelte Abbildung, so dass das ganze Diagramm kommutiert.



Aufgabe 7.3 (Ein kollabierendes amalgamiertes Produkt)

Zeigen Sie, dass das amalgamierte Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ die triviale Gruppe ist. (Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist hier jeweils die Projektion.)

Aufgabe 7.4 (Nilpotenz von p -Gruppen)

Es sei p eine Primzahl. Eine (endliche) p -Gruppe ist eine Gruppe der Ordnung p^k für ein $k \in \mathbb{N}$.

- i) Es sei G eine p -Gruppe die auf einer endlichen Menge X wirkt. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Fixpunkte kongruent $\#X$ modulo p ist.
- ii) Zeigen Sie, dass jede nichttriviale p -Gruppe ein nichttriviales Zentrum hat.
Hinweis: Betrachten Sie die Konjugationswirkung.
- iii) Folgern Sie, dass p -Gruppen nilpotent sind.

Hinweis: Eine Gruppe ist nilpotent genau dann, wenn sie eine endliche Zentralreihe hat, d.h. eine Folge

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_k = 1 ,$$

so dass $[G, G_i] \leq G_{i+1}$ für $0 \leq i \leq k - 1$.

Konstruieren Sie eine absteigende Zentralreihe für G aus einer absteigenden Zentralreihe für $G/Z(G)$.