Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

7. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 27.5.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Seifert–van Kampen, amalgamierte Produkte, Nilpotenz

Aufgabe 7.1 (Seifert–van Kampen)

i) Es sei $T = S^1 \times S^1$ ein 2-Torus und $U \subseteq T$ eine kleine offenen Kreisscheibe. Zeigen Sie, dass $\pi_1(T \setminus U)$ eine freie Gruppe mit zwei Erzeugern ist (Sie brauchen nicht zu zeigen, dass die Aussage unabhängig von dem gewählten U ist.)
Hinweis: Wählen Sie U so, dass $T \setminus U$ eine Umgebung von $S^1 \vee S^1$ ist.

ii) Es seien T_1 und T_2 zwei 2-Tori und $T_1 \# T_2$ der Raum der wie folgt entsteht: Aus T_1 und T_2 werden kleine offene Kreisscheiben U_1 bzw. U_2 herausgeschnitten und die beiden entstandenen Flächen entlang des Randes verklebt. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(T_1 \# T_2) \cong \pi_1(T_1 \setminus U_1) *_{\mathbb{Z}} \pi_1(T_2 \setminus U_2)$$

ist, wobei $\mathbb{Z}$ mit $\pi_1(\partial U_1) \cong \pi_1(\partial U_2)$ identifiziert wird.

(iii*) Folgern Sie die Präsentierung

$$\pi_1(T_1 \# T_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \rangle \ .$$

Aufgabe 7.2 (Universelle Eigenschaft für amalgamierte Produkte)

Es seien H, G_1, G_2 Gruppen und $\iota_1 \colon H \to G_1$ und $\iota_2 \colon H \to G_2$ Homomorphismen. Zeigen Sie, dass das amalgamierte Produkt $G_1 *_H G_2$ folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Es gibt Homomorphismen $\nu_1 \colon G_1 \to G_1 *_H G_2$ und $\nu_2 \colon G_2 \to G_1 *_H G_2$ so dass $\nu_1 \circ \iota_1 = \nu_2 \circ \iota_2$ und wenn F eine Gruppe ist und $\varphi_1 \colon G_1 \to F$ und $\varphi_2 \colon G_2 \to F$ Homomorphismen mit $\varphi_1 \circ \iota_1 = \varphi_2 \circ \iota_2$, dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi \colon G_1 *_H G_2 \to F$ mit $\varphi \circ \nu_1 = \varphi_1$ und $\varphi \circ \nu_2 = \varphi_2$.

Mit anderen Worten, wenn das durchgezogene Diagramm unten kommutiert, dann gibt es eindeutig die gestrichelte Abbildung, so dass das ganze Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & G_1 \arrow[d, "\nu_1"'] \arrow[ddr, "\varphi_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[drr, "\varphi_2"] & G_1 *_H G_2 \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
 & & F
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 7.3 (Ein kollabierendes amalgamiertes Produkt)

Zeigen Sie, dass das amalgamierte Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ die triviale Gruppe ist. (Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist hier jeweils die Projektion.)

Aufgabe 7.4 (Nilpotenz von p-Gruppen)

Es sei p eine Primzahl. Eine (endliche) p-Gruppe ist eine Gruppe der Ordnung p^k für ein $k \in \mathbb{N}$.

i) Es sei G eine p-Gruppe die auf einer endlichen Menge X wirkt. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Fixpunkte kongruent $\#X$ modulo p ist.

ii) Zeigen Sie, dass jede nichttriviale p-Gruppe ein nichttriviales Zentrum hat.
Hinweis: Betrachten Sie die Konjugationswirkung.

iii) Folgern Sie, dass p-Gruppen nilpotent sind.
Hinweis: Eine Gruppe ist nilpotent genau dann, wenn sie eine endliche Zentralreihe hat, d.h. eine Folge

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_k = 1 \ ,$$

so dass $[G, G_i] \leq G_{i+1}$ für $0 \leq i \leq k-1$.
Konstruieren Sie eine absteigende Zentralreihe für G aus einer absteigenden Zentralreihe für $G/Z(G)$.