Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

6. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 20.5.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Fundamentalgruppe, Überlagerung, 1-Zusammenhang

Aufgabe 6.1 (Topologische Gruppen)

Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G, die mit einer Hausdorff-Topologie ausgestattet ist, so dass die Abbildungen $(g, h) \mapsto g \cdot h$ und $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind. (Zur Erinnerung: eine Topologie auf einem Raum X heißt *hausdorffsch*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ offene Umgebungen U und V von x bzw. y gibt, so dass $U \cap V = \emptyset$.)

Zeigen Sie:

i) Wenn eine topologische Gruppe G zusammenhängend ist, dann ist jede diskrete normale Untergruppe von G zentral (d.h. enthalten im Zentrum $Z(G)$).
ii) Die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, 1)$ einer topolgischen Gruppe G ist abelsch.
Hinweis: Betrachten Sie zwei Pfade ρ und ζ. Nutzen Sie die Stetigkeit der Gruppenoperationen, um eine Homotopie von $[\zeta]$ nach $[\rho] * [\zeta] * [\rho]^{-1}$ zu konstruieren.

Aufgabe 6.2 (Fasern von Überlagerungen)

Sei $p \colon E \to X$ eine Überlagerung mit 1-zusammenhängendem E. Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in X$ eine Bijektion $\varphi \colon \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$ gibt.

Aufgabe 6.3 (Fundamentalgruppen projektiver Räume)

Sei X ein topologischer Raum und $p \colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Die *Quotiententopologie* auf Y ist die Topologie in der genau die Mengen U offen sind deren Urbild $p^{-1}(U)$ offen ist.

Der *n-dimensionale reelle projektive Raum* $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ist der Quotient $\mathbb{S}^n/\sim$ der n-Sphäre modulo der Relation $\sim$, die Antipoden miteinander identifiziert.

i) Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n\mathbb{R}$ eine Überlagerung ist.
ii) Bestimmen Sie damit die Fundamentalgruppen der reellen projektiven Räume $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie auch $\pi_1(\mathbb{P}^n\mathbb{R})$ für $n \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 6.4 (Überlagerungen von Gruppen)

Sei G eine topologische Gruppe und D eine diskrete Untergruppe.

i) Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $p \colon G \to G/D$ eine Überlagerung ist (wobei G/D mit der Quotiententopologie ausgestattet ist, siehe Aufgabe 6.3).
ii) Wir nehmen an, dass G 1-zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi_1(G/D, 1) \to D$ aus Aufgabe 6.2 ein Gruppenisomorphismus ist.
iii) Nutzen Sie dies, um die Fundamentalgruppe des n-Torus $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ zu bestimmen.