Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

5. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 13.5.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Freie Gruppen, nilpotente Gruppen, residuell endliche Gruppen, Fundamentalgruppe

Aufgabe 5.1 (Fundamentalgruppe)

Es sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum, und es seien p, q, r, s Punkte aus X. Desweiteren seien

$$\phi \in \Omega(X, p, q), \psi \in \Omega(X, q, r) \text{ und } \gamma \in \Omega(X, r, s)$$

drei Wege in X. Zeigen Sie:

i) Für $\alpha \in [\phi]$ und $\beta \in [\psi]$ gilt $\alpha * \beta \in [\phi * \psi]$.
ii) $([\phi] * [\psi]) * [\gamma] = [\phi] * ([\psi] * [\gamma])$.

Aufgabe 5.2 (freie Gruppen)

Es sei X eine Menge und H eine Untergruppe von endlichem Index in $F(X)$. Dann gilt für jede Untergruppe G von $F(X)$:

$$G \cap H = \{1\} \Rightarrow G = \{1\}.$$

Aufgabe 5.3 (residuell endliche Gruppen)

Zeigen Sie, dass die Lamplighter-Gruppe residuell endlich ist.

Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel Untergruppen der Form

$$L_n := \{(f, 0) \in L \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{i+kn} = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Aufgabe 5.4 (nilpotente Gruppen)

Es sei G eine Gruppe. Zu zwei nichtleeren Teilmengen U und V von G bezeichne $[U, V]$ die durch alle Kommutatoren der Form $[u, v]$ mit $u \in U$ und $v \in V$ erzeugte Untergruppe von G. Die Folge von Untergruppen $(\mathfrak{C}^i(G))_{i \in \mathbb{N}_0}$, die durch

$$\mathfrak{C}^0(G) := G,\ \mathfrak{C}^{i+1}(G) := [\mathfrak{C}^i(G), G]$$

definiert ist, wird als die absteigende Zentralreihe von G bezeichnet. Die Gruppe G heißt nilpotent, wenn ein Index i existiert, so dass $\mathfrak{C}^i(G)$ trivial ist.

i) Zeigen Sie, dass eine nilpotente Gruppe auflösbar ist. Gilt auch die Umkehrung?
ii) Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring R mit Eins die Gruppen $\mathrm{U}(m, R),\ m \in \mathbb{N}$, nilpotent sind.