Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

4. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 6.5.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Freie Gruppen, Ping-Pong Lemma, Kranzprodukte, Präsentation einer Gruppe

Aufgabe 4.1 (Die Strassenlaternengruppe)

Das eingeschränkte Kranzprodukt L von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}$ operiert wie folgt treu auf $X := \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$$(f, z).s := s'$$

mit

$$s'_i := s_{i+z} + f_i$$

für $f, s \in X$ und $z \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten einen nach beiden Richtungen unendlich langen Weg, versehen mit undlichen vielen Laternen, so dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Laterenen 25 Meter beträgt. Ein Anzünder steht an einer Laterne. Diese erhält den Index Null. Ein Element aus X zeigt den An/Aus-Zustand der Laternen vom Standort des Anzünders aus an. (an = 1 und aus = 0)

i) Welche Anweisung an den Anzünder wird durch ein beliebiges Element $l \in L$ ausgedrückt? Wo steht der Anzünder nach Ausführung dieser Anweisung?
ii) Berechnen Sie die Kommutator-Untergruppe von L.
iii) Berechnen Sie das Zentrum von L.
iv*) Es seien

$$a := (f, 0),\ \text{mit } f_0 := 1,\ f_i := 0,\ i \neq 0$$

und

$$t := (0, 1).$$

Zeigen Sie, dass L die Präsentation

$$\langle a, t \mid\ a^2, [t^m a t^{-m}, a], m \geq 1\rangle$$

besitzt.

Aufgabe 4.2 (Der freie Gruppenfunktor)

Es sei $\mathcal{C}$ die Klasse aller Mengen. Zeigen sie, dass die Zuordnung $X \mapsto F(X)$, die einer Menge X die zugehörige freie Gruppe zuordnet, folgendes erfüllt. Es gibt eine Familie $(F_{X,Y})_{(X,Y)\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}}$ von Abbildungen

$$F_{X,Y} : \mathrm{Abb}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y)),$$

so dass

$$F_{Y,Z}(g) \circ F_{X,Y}(f) = F_{X,Z}(g \circ f) \text{ für } f : X \to Y \text{ und } g : Y \to Z,$$

und

$$F_{X,X}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} \text{ für } X \in \mathcal{C}$$

gelten.

Aufgabe 4.3 (Eine Präsentation von Sym(n))

Es bezeichne X die $n-1$-elementige Menge der Transpositionen $(i, i+1)$ aus $G := \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$.

i) Berechnen Sie die Ordnung $m_{st} := \mathrm{ord}_G(st)$ für $s, t \in X$.

ii) Zeigen Sie, dass
$$\langle X \mid \ (st)^{m_{st}}; s, t \in X \rangle$$
eine Präsentation von G ist.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. eine sinnvolle lexikographische Ordnung auf $F(X)$.

Aufgabe 4.4 (Ping-Pong Lemma)

Es sei X ein Erzeugendensystem einer Gruppe G mit $\#X \geq 2$. Dann sind äquivalent:

i) Es existieren eine Gruppenwirkung $G \times Y \to Y$ und paarweise disjunkte Teilmengen $Y_x, \ Z_x, \ x \in X$, von Y, so dass
$$x(Y \setminus Y_x) \subseteq Z_x \text{ und } x^{-1}(Y \setminus Z_x) \subseteq Y_x$$
für alle $x \in X$.

ii) Die Abbildung id_X setzt zu einem Gruppenisomorphismus von $F(X)$ nach G fort.