Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

3. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 29.4.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Alternierende Gruppen, Automorphismen symmetrischer und alternierender Gruppen, direkte, semidirekte und freie Produkte

Aufgabe 3.1 (Äußere Automorphismen kleiner alternierender Gruppen)

Sei X eine Menge mit $3 \leq \#X \leq 5$. Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X))$.

Hinweis: Reproduzieren Sie für $\#X \geq 4$ den Beweis aus der Vorlesung für $\#X \geq 9$ und finden Sie einen Ersatz für Lemma 18. Im Fall $\#X = 5$ kann Aufgabe 2.1 hilfreich sein.

Aufgabe 3.2 (Semidirekte Produkte)

Sei G eine Gruppe und H und N Untergruppen. Wir nehmen an, dass N normal ist, so dass HN eine Untergruppe von G ist. Falls $HN = G$ und $H \cap N = \{1\}$, dann heißt G *semidirektes Produkt von* H *und* N, geschrieben $G = N \rtimes H$.

i) Zeigen Sie: eine Gruppe G mit Normalteiler N ist ein semidirektes Produkt $N \rtimes H$ genau dann wenn der Homomorphismus $\pi\colon G \to G/N$ ein Rechtsinverses besitzt, es also einen Homomorphismus $\sigma\colon G/N \to G$ gibt mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{G/N}$. (Man sagt dann, σ *spaltet* π.)

ii) Sei X eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(X) = \mathrm{Alt}(X) \rtimes H$ ist mit $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie für $\#X = 5$ die Anzahl der Untergruppen, die als H in Frage kommen.

(Da man oft nicht an der konkreten Untergruppe H interessiert ist, schreibt man auch einfach $\mathrm{Sym}(X) = \mathrm{Alt}(X) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

iii) Zeigen Sie: ist $G = N \rtimes H$ und H normal in G, dann ist $G \cong N \times H$.

Aufgabe 3.3 (Freie Produkte und direkte Produkte)

i) Seien G und H nichttriviale Gruppen. Zeigen Sie, dass die Gruppe $G * H$ unendlich ist und triviales Zentrum hat.

ii) Es sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie (nicht notwendigerweise abelscher) Gruppen. Zeigen Sie: es gibt genau einen Homomorphismus $\ast_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} G_i$ der auf jedem G_i die Identität ist (genauer: für jedes $i \in I$ ist die Verknüpfung $G_i \hookrightarrow \ast_{i\in I} G_i \to \prod_{i\in I} G_i \twoheadrightarrow G_i$ die Identität).

Aufgabe 3.4 (Äußere Automorphismen von $\mathrm{Sym}(\{1,\dots,6\})$)

Sei $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ und sei $G = \mathrm{Sym}(X)$. In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass G einen äußeren Automorphismus besitzt und dass deshalb $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X))$ echt größer ist als $\mathrm{Sym}(X)$.

i) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe K der Ordnung 120 hat, die transitiv auf X wirkt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(\{1,2,3,4,5\})$ sechs zyklische Untergruppen der Ordnung 5 hat, auf denen sie transitiv durch Konjugation wirkt.

ii) Zeigen Sie, dass K sein eigener Normalisator ist und dass es genau sechs konjugierte Untergruppen gibt.
Hinweis: Sei k die Anzahl der zu K konjugierten Untergruppen. Zeigen Sie, k gleich dem Index des Normalisators ist. Zeigen Sie, dass k höchstens sechs ist. Betrachten Sie den induzierten Homomorphismus $G \mapsto \mathrm{Sym}(\{1,\dots,k\})$ und folgern Sie, dass k nicht kleiner als sechs sein kann.

iii) Zeigen Sie, dass K keine Transposition enthält.
Hinweis: Eine Untegruppe von G die transitiv auf X wirkt und einen 5-Zykel und eine Transposition enthält ist bereits G.

iv) Sei X' die Menge der zu K konjugierten Untergruppen. Die Gruppe G wirkt auf X' durch Konjugation. Identifizieren Sie X mit X' und zeigen Sie, dass der induzierte Automorphismus von G kein innerer Automorphismus ist.
Hinweis: Ein innerer Automorphismus bildet Transpositionen auf Transpositionen ab.

v) Folgern Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}(X))$ nicht isomorph ist zu $\mathrm{Sym}(X)$.

vi) Können Sie anhand dieser Aufgabe erklären, warum die Aussage von Lemma 18 für $\#X = 6$ falsch ist?