Prof. Dr. L. Kramer
Dr. D. Skodlerack
Dipl.-Math. O. Varghese
Dr. S. Witzel

SS 11

2. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Donnerstag, 21.4.2011, 16:00 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Alternierende Gruppen, 3-Zykel, Kriterium für die Einfachheit einer Gruppe (Satz 12), auflösbare, perfekte und einfache Gruppen

Aufgabe 2.1 (Alternierende Gruppe)

Es sei $\#X \geq 3$.

i) Zeigen Sie: Sind $a, b \in X$ zwei verschiedene Elemente, so erzeugt die Menge aller 3-Zykel (a, b, x), mit $x \in X \setminus \{a, b\}$, die Gruppe $\mathrm{Alt}(X)$.

ii) Es seien $p, q \in \mathrm{Alt}(X)$ zwei 3-Zykel. Dann sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

   a) $\#(\tau_X(p) \cap \tau_X(q)) = 2$.

   b) $\langle p, q \rangle \cong \mathrm{Alt}(4) = \mathrm{Alt}(\{1, 2, 3, 4\})$.

Aufgabe 2.2 (Abelsche und auflösbare Gruppen)

i) Zeigen Sie: Wenn alle Elemente einer Gruppe G Ordnung ≤ 2 haben, dann ist G abelsch und isomorph zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}/2$.

ii) Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn alle Elemente einer Gruppe G Ordnung ≤ 3 haben, dann ist G abelsch.

iii) Es sei $\phi\colon G \to K$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie: Wenn G auflösbar (bzw. perfekt) ist, so ist auch $\phi(G)$ auflösbar (bzw. perfekt).

iv) Zeigen Sie: Untergruppen auflösbarer Gruppen sind auflösbar. Gilt etwas entsprechendes für perfekte Gruppen?

Aufgabe 2.3 (Gruppenwirkungen auf Gruppen)

Es seien H, K Gruppen und $H \to \mathrm{Aut}(K)$ eine Wirkung von H auf K durch Automorphismen.

i) Zeigen Sie: Wenn H transitiv auf $K \setminus \{1\}$ wirkt, dann haben alle Elemente aus $K \setminus \{1\}$ die gleiche Ordnung.

ii) Zeigen Sie: Ist $\#K \geq 4$ und wirkt H zweifach transitiv auf $K \setminus \{1\}$, so haben alle Elemente aus $K \setminus \{1\}$ die Ordnung 2.

iii) Zeigen Sie: Ist $\#K \geq 5$, so wirkt H nicht dreifach transitiv auf $K \setminus \{1\}$.

Aufgabe 2.4 (Kriterium für die Einfachheit einer Gruppe)

Es sei F ein Körper mit $\#F \geq 4$.

i) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(F)$ von den Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, mit $t \in F$, erzeugt wird. Folgern Sie, dass $\mathrm{SL}_2(F)$ perfekt ist.

ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(F)$ auf FP^1, der Menge der eindimensionalen Untervektorräume von F^2, zweifach transitiv wirkt. Bestimmen Sie das Zentrum Z von $\mathrm{SL}_2(F)$ und zeigen Sie, dass Z genau der Kern der Wirkung ist.

iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(F)/Z = \mathrm{PSL}_2(F)$ einfach ist.