

## 1. Hausaufgabenblatt zur Gruppentheorie

(**Abgabe:** bis Freitag, 15.4.2011, 8:15 Uhr in Zettelkasten 156 im Hörsaalgebäude)

### Stichworte zur Vorbereitung

Symmetrische Gruppe, alternierende Gruppe, Wirkungen die treu, frei, primitiv oder transitiv sind

#### Aufgabe 1.1 (Symmetriegruppe des Ikosaeders)

Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe des Ikosaeders.

#### Aufgabe 1.2 (Symmetrische Gruppe)

Sei  $X$  eine endliche Menge und  $G = \text{Sym}(X)$ .

- i) Zeigen Sie, dass  $\#G = (\#X)!$ .
- ii) Zeigen Sie, dass  $G$  von Transpositionen erzeugt wird.
- iii) Zeigen Sie, dass  $\text{Alt}(X)$  eine normale Untergruppe von Index 2 von  $\text{Sym}(X)$  ist, wenn  $\#X \geq 2$ .

*Hinweis:* Konstruieren Sie einen Homomorphismus

$$\sigma: G \rightarrow C_2$$

auf die zyklische Gruppe  $C_2 = (\{1, -1\}, \cdot)$  mit zwei Elementen, dessen Kern  $\text{Alt}(X)$  ist. Dieser Morphismus heißt *Signumsfunktion*.

#### Aufgabe 1.3 (Transitive Wirkungen)

Sei  $G$  eine Gruppe die transitiv auf einer Menge  $X$  wirkt.

- i) Zeigen Sie: wenn es einen Normalteiler  $N$  und ein Element  $x \in X$  gibt, so dass  $N \subseteq G_x$ , dann liegt  $N$  im Kern der Wirkung.
- ii) Sei nun  $Y$  eine weitere Menge auf der  $G$  wirkt und  $\rho: X \rightarrow Y$  eine  $G$ -äquivalente Abbildung.  
Zeigen Sie, dass  $\rho$  genau dann injektiv ist wenn es ein  $x \in X$  gibt, so dass  $G_x = G_{\rho(x)}$ .

#### Aufgabe 1.4 (Primitive Wirkungen)

- i) Eine Gruppe  $G$  wirke primitiv und treu auf einer Menge  $X$ . Zeige: ist  $N$  ein nichttrivialer Normalteiler von  $G$ , dann wirkt  $N$  transitiv auf  $X$ .
- ii) Eine Gruppe  $G$  wirke auf einer Menge  $X$ . Zeige: Wenn es eine Untergruppe  $H$  gibt, deren Wirkung auf  $X$  primitiv ist, so ist auch die Wirkung von  $G$  primitiv.

Prof. Clara Löh veranstaltet in Regensburg eine Sommerschule mit dem Thema  
**Fixpunkte, Färbungen und Topologie**  
die vom 22. bis 24. August stattfindet. Die Sommerschule richtet sich an Studenten im zweiten oder dritten Studienjahr. Weitere Informationen gibt es auf der Veranstaltungs-Homepage  
<http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/summerschool2011/>