Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

8. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Montag 10.1.2011, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Hinweis: Es brauchen nur 4 der folgenden Aufgaben bearbeitet zu werden. Die (richtige) Lösung zusätzlicher Aufgaben wird jedoch mit Bonuspunkten honoriert.

Stichworte zur Vorbereitung

topologischer Raum, hausdorffsch, Kompaktheit, Abzählbarkeit, metrischer Raum, Stetigkeit, σ-Algebra, Borelalgebra, Maßraum, Nullmenge, messbare / integrable Funktion, $\|\cdot\|_1$-Norm

Aufgabe 8.1 (Hausdorffraum, Kompaktheit, Abzählbarkeit)

Ein Punkt x in einem topologischen Raum X heißt *isoliert*, wenn die Menge $\{x\}$ offen in X ist. Zeigen Sie: Ein kompakter Hausdorffraum ohne isolierte Punkte ist überabzählbar (d. h. nicht abzählbar).

Anleitung: Es sei X ein kompakter Hausdorffraum ohne isolierte Punkte. Zeigen Sie:

(i) Sind ein $x \in X$ und eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ beliebig gegeben, so existiert eine nichtleere offene Teilmenge $V \subseteq U$ mit $x \notin \bar{V}$.

(ii) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in X. Dann gibt es eine absteigende Kette $\bar{V}_1 \supseteq \bar{V}_2 \supseteq \bar{V}_3 \supseteq \ldots$ abgeschlossener nichtleerer Teilmengen von X mit $x_n \notin \bar{V}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in X, so gibt es ein $y \in X$ mit $y \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) X ist nicht abzählbar.

Aufgabe 8.2 (Maß, metrischer Raum, Stetigkeit)

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $A, B \in \mathcal{A}$ definieren wir einen Abstand wie folgt:

$$d(A, B) := \min\{\mu(A \triangle B), 1\},$$

wobei $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die sogenannte *symmetrische Differenz* ist.

(i) Zeigen Sie: d ist eine *Pseudo-Metrik*, d. h. $d(A, B) = d(B, A) \geq 0$, $d(A, A) = 0$ und $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

(ii) Sei $[A] = \{B \in \mathcal{A} \mid d(A, B) = 0\}$. Zeigen Sie: Die Relation $d(A, B) = 0$ ist eine Äquivalenzrelation und auf den Äquivalenzklassen ist d eine Metrik.

(iii) Folgende Abbildungen sind wohldefiniert und stetig:

(a) $([A], [B]) \mapsto [A \cup B]$

(b) $([A], [B]) \mapsto [A \cap B]$

(c) $([A], [B]) \mapsto [A \triangle B]$

Aufgabe 8.3 ((erzeugte) σ-Algebra, Abzählbarkeit)

Es sei $X = [0,1]$. Weiter sei $\mathcal{A}$ die σ-Algebra auf X, die von allen endlichen Teilmengen von X erzeugt wird. Zeigen Sie: $[0, \frac{1}{2}] \notin \mathcal{A}$.

Hinweis: Zeigen Sie: Wenn $A \in \mathcal{A}$ ist, dann ist entweder A oder $X \setminus A$ abzählbar. Die Aussage von Aufgabe 8.1. könnte helfen.

Aufgabe 8.4 (σ-Algebra, Maß, Maßraum, Nullmenge)

Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn für jede Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gilt, dass jede Teilmenge $B \subseteq N$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten ist. Zeigen Sie, dass man auf die folgende Weise jeden Maßraum vervollständigen kann:

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Wir setzen

$$\bar{\mathcal{A}} := \{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}\,,\ B \subseteq N \text{ für ein } N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0\}$$

und weisen jeder Menge der obigen Form den Wert

$$\bar{\mu}(A \cup B) := \mu(A)$$

zu. Zeigen Sie, dass $\bar{\mu}$ wohldefiniert ist und dass $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ist.

Aufgabe 8.5 ((erzeugte) σ-Algebra, Maß, messbare Funktion, integrable Funktion, gleichmäßige Konvergenz, $\|\cdot\|_1$-Norm, Cauchyfolge)

Es sei $X = \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{A}$ die σ-Algebra auf X, die von allen endlichen Teilmengen von X erzeugt wird.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist.

(ii) Für $A \subseteq X$ betrachten wir das Zählmaß $\mu(A)$:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{(Anzahl der Elemente) wenn } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: μ ist ein Maß, welches sogar vollständig ist (vgl. Aufgabe 8.4).

(iii) Reelle Funktionen auf X sind das gleiche wie reelle Folgen mit $\mathbb{N}$ als Indexmenge (warum?). Welche Folgen sind messbare Funktionen? Welche Folgen sind integrable Funktionen?

(iv) Wir definieren eine Funktionenfolge messbarer und integrabler Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X wie folgt: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ setze

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & : 0 \le x < n \\ 0 & : x \ge n \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig konvergiert, jedoch keine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge ist.

Aufgabe 8.6 (Borelalgebra, messbare Funktion)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f messbar ist bezüglich der Borelalgebra auf $\mathbb{R}$.

❄ Frohe Feiertage und einen guten Rutsch ins Jahr 2011 ❄