Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

5. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Donnerstag 2.12.2010, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Hausdorff-Räume, kompakte Räume, normale Räume, zusammenhängende Räume, Abzählbarkeit von Mengen, Urysohns Lemma, Zerlegung der Eins, Einbettbarkeit von kompakten Mannigfaltigkeiten, Lipschitzstetigkeit, gleichgradige Stetigkeit, Ascolis Theorem

Aufgabe 5.1 (Hausdorff-Räume, kompakte Räume, Aufgabe 3.1)

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein Hausdorff-Raum und $a \notin X$. Wir definieren $\widehat{X} := X \cup \{a\}$ und

$$\mathcal{T}_{\widehat{X}} := \left\{ U \mid U \in \mathcal{T}_X \text{ oder } U = \widehat{X} - C \text{ und } C \subseteq X \text{ ist kompakt} \right\}$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Die Menge $\mathcal{T}_{\widehat{X}}$ ist eine Topologie auf $\widehat{X}$.

ii) Der topologischer Raum $(\widehat{X}, \mathcal{T}_{\widehat{X}})$ ist kompakt.

iii) Der Raum $(\widehat{X}, \mathcal{T}_{\widehat{X}})$ ist genau dann hausdorffsch, wenn jeder Punkt aus X eine kompakte Umgebung in X besitzt (dann nennt man X *lokalkompakt*).

Der Raum $(\widehat{X}, \mathcal{T}_{\widehat{X}})$ heißt die *Einpunktkompaktifizierung* von X.

(*-Aufgabe)

Zeigen Sie, dass die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ homöomorph zu $\mathbb{S}^n$ für $n \geq 1$ ist.

Hinweise: Betrachten Sie dazu die stereographische Projektion aus dem Nordpol $N := (0, \ldots, 0, 1)$,

$$\pi : \mathbb{S}^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

d.h. $\pi(x) = y$ genau dann wenn $(y, 0)$ der Schnittpunkt der Geraden durch N und x mit der Hyperebene $H := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \right\} \cong \mathbb{R}^n$ ist. Dann zeigen Sie, dass die Fortsetzung $\widehat{\pi} : \mathbb{S}^n \to \widehat{\mathbb{R}}^n$ von π definiert durch $\widehat{\pi}(N) := a$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 5.2 (abzählbare Mengen, normale Räume, zusammenhängende Räume, Urysohns Lemma)

Sei X ein normaler zusammenhängender Raum, der mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Zeigen Sie, dass X nicht abzählbar ist.

Hinweise: Zeigen Sie, dass eine surjektive Abbildung von X nach $[0, 1]$ existiert.

Aufgabe 5.3 (Zerlegung der Eins, Einbettbarkeit)

Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Weiter existiere für jeden Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung N_x von x, die sich in $\mathbb{R}^m$ für ein $m = m_x \in \mathbb{N}$ einbetten lässt, d.h. es existiert $\alpha_x : N_x \to \mathbb{R}^m$ injektiv und stetig (und daher auch abgeschlossen—warum?). Zeigen Sie, dass sich X in $\mathbb{R}^\ell$ für ℓ hinreichend groß einbetten lässt.

Aufgabe 5.4 (Lipschitzstetigkeit, gleichgradige Stetigkeit, Ascolis Theorem)

Sei X ein kompakter metrischer Raum, Y ein vollständiger metrischer Raum und $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$.

i) Zeigen Sie folgende Aussagen:
   a) Wenn $\mathcal{F}$ endlich ist, dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.
   b) Wenn alle $f \in \mathcal{F}$ L-Lipschitz-stetig für eine Lipschitzkonstante $L \geq 0$ sind, dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

ii) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   a) Wenn jedes $f \in \mathcal{F}$ Lipschitz-stetig ist, dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.
   b) Sei $X = [0, 1] = Y$. Dann ist $\mathcal{F} = \{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig.