Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese WS 10/11

2. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Donnerstag 4.11.2010, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung

Regulärer Raum, Unterraumtopologie, Produkttopologie, metrischer Raum, Basis einer Topologie, Stetigkeit, feinere / gröbere Topologie

Aufgabe 2.1 (Reguläre Räume)

Zeigen Sie:

i) Unterräume regulärer Räume sind regulär.

ii) Das Produkt zweier regulärer Räume ist regulär.

Hinweise:

zu i) Sei $Y \subseteq X$ und sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen in der Unterraumtopologie von Y. Es bezeichne $\bar{B}$ den Abschluss von B in X. Überlegen Sie sich zuerst, dass dann $\bar{B} \cap Y = B$ gilt.

zu ii) Benutzen Sie das Kriterium aus Satz §1.20 der Vorlesung. Überlegen Sie zuerst: Sind X, Y topologische Räume und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, dann ist $\overline{A \times B} \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$.

(*-Aufgabe)

Sind X, Y topologische Räume und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, dann ist $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Aufgabe 2.2 (Metrische Räume, durch Metrik induzierte Topologie)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{T}$ die durch die Metrik induzierte Topologie. Das heißt, eine Basis von $\mathcal{T}$ ist gegeben durch die Menge aller offenen Kugeln $B_r(x)$ mit $r > 0$, $x \in X$, wobei $B_r(x) = \{z \in X \mid d(x, z) < r\}$. Wir definieren eine neue Metrik $\hat{d}$ wie folgt:

$$\hat{d}(x, y) := \min(d(x, y), 1) \quad \text{für } x, y \in X$$

Zeigen Sie, dass die durch die Metrik $\hat{d}$ induzierte Topologie mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt.

Bemerkung: Die Metrik $\hat{d}$ ist durch 1 beschränkt. Insbesondere ist jede Kugel bezüglich $\hat{d}$ mit einem Radius $r > 1$ bereits ganz X. Die Aufgabe zeigt, dass eine solche Eigenschaft keinerlei Aussagen über die induzierte Topologie bzw. den Raum zulässt.

Aufgabe 2.3 (stetige Abbildungen, Produkte)

Für $i = 1, 2$ seien X_i, Y_i topologische Räume und $f_i \colon X_i \to Y_i$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f_1 \times f_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2\,,\ (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

stetig ist.

Aufgabe 2.4 (Quotientenraum und -topologie)

Es sei X ein topologischer Raum und Y eine Menge. Weiter sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Es sei $\mathcal{T} = \{U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ is offen in } X\}$.

1. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf Y.
2. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{T}'$ eine beliebige Topologie auf Y, bezüglich derer f stetig ist, so ist $\mathcal{T}'$ gröber als $\mathcal{T}$.
3. Es sei Z ein topologischer Raum und $g : Y \to Z$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Wenn $g \circ f$ stetig ist, dann ist auch g stetig bezüglich $\mathcal{T}$.

Bemerkung: Wenn die Abbildung f surjektiv ist, so nennt man $(Y, \mathcal{T})$ auch einen Quotientenraum von X (warum wohl?).

Organisatorisches

Weitere Materialien zur Vorlesung finden Sie unter
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/analysis_iii_files/books/`
Es ist folgende Authentifizierung erforderlich:
Login: `Analysis3` (Das Passwort ist geheim und wird in der Vorlesung bekannt gegeben.)